# 44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**Шабац, 17.04.2004.**

## Први разред

**1.** Наћи све парове природних бројева $(a, b)$ за које важи:

$$5a^b - b = 2004.$$

**2.** Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке $D$ и $E$ редом на полуправама $CB$ и $CA$, тако да важи $CD = CE = \dfrac{AC + BC}{2}$. Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$ и $P$ средиште лука $AB$ кружнице описане око троугла $ABC$, који не садржи тачку $C$. Доказати да права $DE$ полови дуж $HP$.

**3.** Ако су $a$, $b$, $c$ позитивни бројеви, такви да је $abc = 1$, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geqslant \sqrt{2}.$$

**4.** У простору је дат скуп $S$ од 100 тачака, тако да никоје 4 од њих не припадају једној равни. Доказати да не постоји више од $4 \cdot 101^2$ тетраедара са теменима из скупа $S$, таквих да свака два од тих тетраедара имају највише два заједничка темена.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

## 44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**Шабац, 17.04.2004.**

### Други разред

**1.** Ако су $a$, $b$, $c$ природни бројеви такви да је и $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ природан број, доказати да је $abc$ потпун куб.

**2.** Дат је оштроугли троугао са полупречником уписане кружнице $r$. Доказати да збир растојања ортоцентра од страница троугла није већи од $3r$.

**3.** Нека су $M$, $N$, $P$ произвољне тачке редом на страницама $BC$, $CA$, $AB$ оштроуглог троугла $ABC$. Доказати да је тачна бар једна од неједнакости:

$$NP \geqslant \frac{1}{2}BC, \quad PM \geqslant \frac{1}{2}CA, \quad MN \geqslant \frac{1}{2}AB.$$

**4.** Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питао колико пута се броји град, ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

## 44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## Шабац, 17.04.2004.

### Трећи и четврти разред

**1.** У троуглу $\triangle ABC$ површине $S$ тачка $H$ је ортоцентар, $D$, $E$ и $F$ су подножја висина из $A$, $B$ и $C$, а $P$, $Q$ и $R$ тачке симетричне тачкама $A$, $B$ и $C$ у односу на праве $BC$, $CA$ и $AB$, редом. Познато је да троуглови $DEF$ и $PQR$ имају једнаку површину $T$ и да је $T > \frac{3}{5}S$. Доказати да је $T = S$.

**2.** Низ $(a_n)$ одређен је условима $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \quad \text{за} \quad n \geqslant 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

**3.** Нека је $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Колико има подскупова $B$ скупа $A$, таквих да за свако $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу $B$?

**4.** Нека је $(a_n)$ низ одређен условима $a_1 = x \in \mathbb{R}$ и $3a_{n+1} = a_n + 1$ за $n \geqslant 1$. Нека је

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n - \frac{1}{6} \right], \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n + \frac{1}{6} \right].$$

Израчунати збир $A + B$ у зависности од $x$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.