## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

### Први разред, А категорија

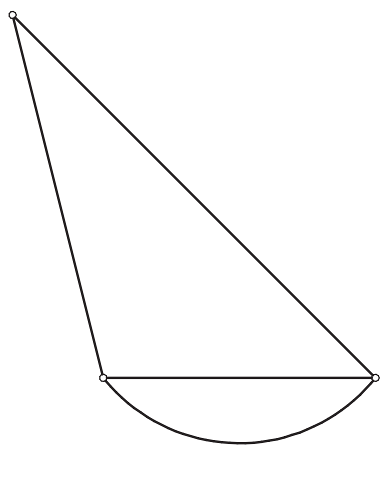
**1.** Колико има функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таквих да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}\,?$$

**2.** Нека тачка $C$ припада дужи $AB$ и нека су $k_0$, $k_{01}$ и $k_{02}$ кругови чији су пречници $AB$, $AC$ и $CB$, редом. Нека је $D$ тачка пресека кружнице $k_0$ и нормале кроз $C$ на дуж $AB$. Нека су $k_1$ и $k_2$ кругови који се налазе у истој полуравни одређеној правом $AB$ у којој и тачка $D$ и који додирују, редом, кружнице $k_{01}$, $k_0$ и дуж $CD$, односно кружнице $k_{02}$, $k_0$ и дуж $CD$. Нека је $k$ круг најмањег полупречника који садржи и додирује кругове $k_1$ и $k_2$. Доказати да је пречник круга $k$ једнак дужини дужи $CD$.

**3.** На кружници је уочен коначан број лукова, таквих да је дужина сваког од њих мања од полуобима кружнице и да свака три од њих имају непразан пресек. Доказати да постоји тачка кружнице која се не налази ни на једном луку.

**4.** Конструисати барем једну праву која фигуру са слике, састављену од троугла и кружног одсечка, дели на два по површини једнака дела.



**5.** Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак $2008^{2009}$?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

### Први разред, Б категорија

**1.** Одредити остатак при дељењу броја $5^{102}+4^{99}+3^{100}$ са 13.

**2.** Нека су $V, S, T$ различите тачке равни. Конструисати троугао $ABC$, тако да су тачке $V, S$ и $T$ пресечне тачке описане кружнице овог троугла са правама којима припадају висина, симетрала угла и тежишна линија које одговарају темену $C$, редом.

**3.** Доказати да за све реалне $x$ и $y$ важи неједнакост

$$x^2y^4+2\cdot\left(x^2+2\right)\cdot y^2+4xy+x^2\geqslant 4xy^3.$$

**4.** Нека је $ABC$ тупоугли троугао ($\sphericalangle ABC>90^\circ$) и нека је $R$ полупречник описане кружнице овог троугла. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена $C$ секу праву $AB$ у тачкама $L$ и $M$, редом. Ако је $CL=CM$, доказати да је $4R^2=AC^2+BC^2$.

**5.** На колико начина је могуће у свако поље табеле са две врсте и 2009 колона уписати природан број не већи од 2803, тако да ни у једној колони већи број не буде изнад мањег?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

### Други разред, А категорија

**1.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$28 \cdot 3 \cdot 2009 = 28^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2009^{x^3}.$$

**2.** Одредити све природне бројеве $n$ за које једначина

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1 = 0$$

има бар једно решење у скупу рационалних бројева.

**3.** Нека су $r$ и $R$ полупречници уписане и описане кружнице, редом, оштроуглог троугла, а $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ његови углови. Доказати да важи

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} \geqslant \frac{9R}{R+r}.$$

**4.** На колико начина се 6 различитих куглица може распоредити у 6 кутија које се не разликују? У сваку кутију се може распоредити произвољан број куглица; кутија може бити и празна.

**5.** Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак $2009^{2008}$?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.**

**Други разред, Б категорија**

**1.** Свежи краставци садрже 99% воде. Ако свежи краставци преноће, ујутру садрже 98% воде. Ако је увече у продавници остављено 100 килограма свежих краставаца, колико ће килограма ујутру бити за продају?

**2.** Нека су $P$ и $Q$ средишта страница $AB$ и $AC$, редом, једнакостраничног троугла $ABC$. Нека је $R$ пресечна тачка праве $PQ$ и описане кружнице $\triangle ABC$, тако да је $P-Q-R$. Доказати да је $\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{PR}{PQ}$.

**3.** Који је од бројева $a=\log_3 10$ и $b=\log_4 17$ већи?

**4.** Нека је $a\in\mathbb{R}$ и функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x)=ax^2+x+1.$$

Одредити све вредности параметра $a$, тако да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи неједнакост

$$f\left(f(x)\right)\geqslant 0.$$

**5.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$28\cdot 3\cdot 2009=28^x\cdot 3^{x^2}\cdot 2009^{x^3}.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.**

## Трећи разред, А категорија

**1.** Доказати да полином

$$P(x) = (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1)^{2008} = a_{8032}x^{8032} + a_{8031}x^{8031} + \ldots + a_1x + a_0$$

има бар два негативна коефицијента.

**2.** Кружнице $k_1$ и $k_2$ се секу у тачкама $A$ и $B$. Тангента на $k_1$ у $A$ и тангента на $k_2$ у $B$ се секу у тачки $M$. Произвољна права кроз $A$ сече кругове $k_1$ и $k_2$ у тачкама $X$ и $Y$ (различитим од тачке $A$), редом. Ако је $BY \cap MX = P$ и $MA \cap k_2 = Q \neq A$, доказати да је $PQ \parallel XY$.

**3.** Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ ненегативни реални бројеви такви да је $x_0 = x_1 = 0$, $x_n = x_{n+1} = 1$. Доказати да постоји $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ за које важи:

$$|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| \geqslant \frac{4}{n^2}\,.$$

**4.** Одредити све природне бројеве $a, b, c$, тако да важи

$$4 \mid a + b \qquad \text{и} \qquad a^2 - 2a = b^2 + c^2.$$

**5.** Четири детета имају чоколаду правоугаоног облика са 10 редова и по 6 коцкица у реду. Свако дете држи чоколаду за један угао, и жели да поједе парче у облику правоугаоника (са страницама паралелним ивицама чоколаде) које садржи тај угао. На колико начина је могуће одломити таква четири парчета, ако чоколада може да се ломи само по линијама између коцкица?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
# УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

## Трећи разред, Б категорија

**1.** У $xOy$-равни одредити једначине страница троугла $ABC$, ако су координате тачке $A(0, -9)$, једначина праве која садржи тежишну дуж која одговара темену $B$ је $x + 2y + 13 = 0$, а једначина праве која садржи висину која одговара темену $C$ је $3x + y + 19 = 0$.

**2.** Нека тачка $M$ припада описаној кружници једнакостраничног $\triangle ABC$. Ако је полупречник ове кружнице $R$, израчунати $MA^4 + MB^4 + MC^4$.

**3.** У праву купу полупречника основе $r = 17$ и изводнице $s = \sqrt{545}$ уписана је права тространа призма основних ивица $a = 17$, $b = 10$ и $c = 9$, тако да се темена доње основе налазе у основи купе, а горње на омотачу. Израчунати запремину призме.

**4.** Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу димензија $7 \times 7$ тако да се никоја два не туку?

**5.** Одредити све реалне бројеве $x$ за које важи

$$\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \geqslant \log_{x^3+1} x^3 \geqslant \ldots \geqslant \log_{x^n+1} x^n \geqslant \ldots .$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

### Четврти разред, А категорија

**1.** Нека је
$$P(x) = \left(x^{2009} - 2009\right) \cdot \left(x^{2008} - 2008\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^{1} - 1\right).$$
Одредити све $a \in \mathbb{C}$ такве да $(x-a)^2 \mid P(x)$.

**2.** Кружнице $k_1$ и $k_2$ се секу у тачкама $A$ и $B$. Тангента на $k_1$ у $A$ и тангента на $k_2$ у $B$ се секу у тачки $M$. Произвољна права кроз $A$ сече кругове $k_1$ и $k_2$ у тачкама $X$ и $Y$ (различитим од тачке $A$), редом. Ако је $BY \cap MX = P$ и $MA \cap k_2 = Q \neq A$, доказати да је $PQ \parallel XY$.

**3.** Нека су $a$, $b$, $c$ позитивни реални бројеви. Доказати да важи
$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

**4.** Одредити све природне бројеве $a, b, c$, тако да важи
$$4 \mid a + b \qquad \text{и} \qquad a^2 - 2a = b^2 + c^2.$$

**5.** Одредити најмање $n$ са особином да ма како се постави $n$ дама на шаховску таблу димензија $2009 \times 2009$, може се изабрати 2009 дама, тако да се никоје две од њих не нападају.

*Напомена.* На једном пољу табле може се налазити само једна дама. Дама напада фигуру ако се налазе у истој врсти, у истој колони или на истој (не нужно главној) дијагонали.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

### Четврти разред, Б категорија

**1.** Збир три броја је 14. Ако се средњи по величини повећа за 1, добијају се три узастопна члана аритметичког низа. Ако се исти број смањи за 1, добијају се три узастопна члана геометријског низа. Одредити збир квадрата та три броја.

**2.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које су неједначине

$$\log_{x^2}(x+6) \geqslant \frac{1}{4} \qquad \text{и} \qquad \log_{x+a}(x+4) \leqslant 1$$

еквивалентне.

**3.** Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и нека је функција $f : [\,0, 2\pi\,] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

Одредити $\max\limits_{x\in[\,0,2\pi\,]} f(x)$ (у функцији од $a, b, c$).

**4.** Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу димензија $7 \times 7$ тако да се никоја два не туку?

**5.** Странице троугла $ABC$ су узастопни чланови аритметичке прогресије. Наћи углове овог троугла, ако су и одговарајуће тежишне линије $t_a$, $t_b$ и $t_c$ узастопни чланови аритметичке прогресије.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.