Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Први разред – А категорија

1. Дијагонале AC и CE правилног шестоугла $ABCDEF$ подељене су тачкама M и N тако да је $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Одредити λ ако су тачке B, M и N колинеарне.

2. Дате су три неколинеарне тачке A, B и C. Конструисати тачку D тако да четвороугао $ABCD$ буде тетиван и тангентан.

3. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.

4. Одредити минималну вредност израза $x + y + z$ при ограничењима
$$\begin{aligned} xy(10x + 10y + 7z) &\geqslant 27, \\ yz(10y + 10z + 7x) &\geqslant 27, \\ zx(10z + 10x + 7y) &\geqslant 27, \\ x, y, z &\geqslant 0. \end{aligned}$$

5. У равни троугла ABC уочимо n правих, од којих је свака паралелна некој страници троугла. За које најмање n је могуће да ових n правих деле раван на бар 207 области (ограничених и неограничених)?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – А категорија

1. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Права AD сече уписани круг троугла ABC још у тачки Q. Доказати да права EQ пролази кроз средиште дужи AF ако и само ако је $AC = BC$.

2. Нека је S скуп комплексних бројева дефинисан са:

$$S = \{z \in \mathbb{C} | \ |z + \frac{1}{z}| = 1\}.$$

(a) Наћи највећу могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$;
(b) Наћи најмању могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$.

3. Решити једначину $x^5 = y^5 + 3y^4 + 8y^2 + 5y + 1$ у целим бројевима.

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефициентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a-b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.

5. Могу ли се поља квадрата 5×5 прекрити правоугаоницима 2×3 тако да свако поље квадрата буде прекривено исти број пута?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Права EF сече праву BC у P. Доказати да је права PS нормална на праву AD.

2. У троуглу ABC је $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB, тако да је $AD = BC$. Ако је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$ одредити могуће вредности за $\sphericalangle ABC$.

3. Нека су a и n природни бројеви, $a > 1$, такви да n дели $a^n - 1$. Доказати да тада $(a-1)n$ дели $a^n - 1$.

4. У групи људи сваки човек има тачно три познаника. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије тако да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој се налази.

5. Одредити минималну вредност израза $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ уз ограничења

$$\min\{x(y^2+z^2), y(z^2+x^2), z(x^2+y^2)\} \geqslant 1+xyz, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – А категорија

1. Код једнакокраког троугла ABC је $AB = BC$ и $\angle ABC = 30°$. Тачка D припада страници BC троугла тако да је $AC : BD = \sqrt{2}$. Израчунати угао $\angle DAC$.

2. Ако су X, Y и Z тачке на страницама BC, CA и AB троугла ABC, такве да је $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle X = \sphericalangle A$, $\sphericalangle Y = \sphericalangle B$), доказати да се ортоцентар троугла XYZ и центар описаног круга троугла ABC поклапају.

3. Доказати да постоји полином облика $x^n + 2007x^{n-1} + \cdots$ који дели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ дати непаран природан број већи од 1. Доказати да се сваки природан број $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$ може представити као збир или разлика два природна броја који су мањи од n и узајамно прости са n.

5. Колико највише ловаца може да се стави на шаховску таблу димензија $m \times n$ тако да ни један од њих не туче више од два друга ловца.

Напомена: Ловац туче фигуру која је на истој дијагонали и која није заклоњена неком другом фигуром.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

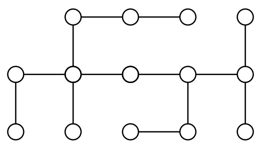
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Први разред – Б категорија

1. Наћи све природне бројеве x такве да су све цифре броја x^{29} различите.

2. На приказаној мапи сваки кружић је кућа у којој станује по један ђак пешак док су линије између кружића путеви између кућа. Где треба изградити школу у селу тако да укупан пут који прелазе ђаци пешаци буде најмањи ако се зна да је дужина пута између две суседне куће једнака 1 километар. Образложити одговор!



Напомена: Ђаци се крећу искључиво по путевима а дозвољено место за изградњу школе је на некој линији или у неком од чворова наведене мапе.

3. Наћи остатак дељења броја B бројем A ако је $x = 2^{2007}$ и

$$A = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \quad B = x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1.$$

4. Доказати да конвексан четвороугао $ABCD$ код кога је $AB = 2$, $BC = 1$, $DA = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$ и $\angle BCD = 120^\circ$, мора бити трапез.

5. Одредити непознате бројеве (број цифара) у једнакости

$$\sqrt{11\cdots 1 - 22\cdots 2} = 33\cdots 3$$

ако се зна да број $33\cdots 3$ има 2007 цифара.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – Б категорија

1. Раван је разложена на јединичне квадрате тако да формира бесконачну шаховску таблу. Уписати у сваки квадрат по један од бројева $1, 2, 3, 4, 5$ тако да у сваких пет хоризонтално, вертикално или дијагонално суседних квадрата буду уписани сви ови бројеви?

2. Нека је CD висина правоуглог троугла ABC (угао код темена C је $90°$). Ако је K тачка равни тог троугла таква да је $AK = AC$, доказати да је пречник кружнице описане око троугла ABK који садржи тачку A нормалан на DK.

3. Нека је $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ квадратна функција, где су α и β неки (не обавезно различити) природни бројеви. Колико реалних и различитих нула има једначина

$$f(f(f(x))) = 0 \ ?$$

4. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.

5. Одредити све реалне бројеве $x > 1$ за које је тачна неједнакост

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leqslant 2.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.

2. Права p која је паралелна страници AB датог троугла ABC и полови страницу BC сече симетралу s угла ABC у тачки T. Ако је O центар уписаног круга датог троугла, доказати да је

$$\sphericalangle OCT = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

3. Доказати да једначина $x + \cos x = 1$ има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

4. Наћи бар једну неконстантну функцију $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услов:

$$f(x+2) + f(x) = f(x+1) \text{ за свако } x \in \mathbb{R}.$$

5. α, β, γ су оштри углови које дијагонала квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ гради редом са ивицама AA_1, AB и AD. Доказати неједнакост

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.

2. У троуглу ABC важе релације $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB таква да је $AD = BC$. Одредити вредност угла $\sphericalangle ABC$ ако се зна да је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$.

3. Нека су a и b природни бројеви такви да је $a \cdot b = 10^{20}$ и зна се да a дели b^2, b^2 дели a^3, a^3 дели b^4, b^4 дели a^5 итд., $a^{2n-1} \mid b^{2n}$ и $b^{2n} \mid a^{2n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a = b$.

4. Дат је полином $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ са целобројним коефицијентима. Ако је $a \cdot d$ непаран а $b \cdot c$ паран број, показати да је бар једна нула полинома $P(x)$ ирационална. Показати примером да аналогно тврђење не важи ако је $a \cdot d$ паран а $b \cdot c$ непаран број?

5. Одредити максималну вредност коју може имати површина нормалне пројекције правилног тетраедра ивице a на произвољну раван.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.