Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Први разред – А категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2004?
(Трапез је четвороугао који има тачно две паралелне странице!)

2. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са $AB = AC$. Дата је тачка D на страници AC, таква да је $CD = 2AD$ и тачка P на дужи BD. Ако је $\sphericalangle APC = 90^\circ$, доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCB$.

3. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_{501}$ произвољне, међусобно различите тачке у равни. Доказати да на било којој кружници полупречника 4 постоји тачка M за коју је испуњено да је збир дужина дужи $MA_1, MA_2, \ldots, MA_{501}$ већи или једнак 2004.

4. За реалне бројеве a и b доказати следећу неједнакост:

$$a(1+b^2) + b(1+a^2) \leqslant (1+a^2)(1+b^2).$$

5. На табли је написано 2005 јединица. Дозвољено нам је да избришемо два од записаних бројева и уместо њих напишемо четвртину њихове суме. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Доказати да последњи преостали број није мањи од 1/2005.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Други разред – А категорија

1. Нека су a, b, c природни бројеви такви да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Ако је d највећи заједнички делилац бројева a, b, c, доказати да је $abcd$ потпун квадрат.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужима BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је $\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle AC_1B = 90^\circ$. Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

3. Нека је P тачка унутар оштроуглог троугла $\triangle ABC$, $AC < BC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Права CP сече AB у тачки D. Доказати да је $\dfrac{AD}{DB} < \dfrac{AC^2}{CB^2}$.

4. Дата су 2 квадратна полинома са реалним коефицијентима,

$$P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1 \qquad \text{и} \qquad P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2,$$

при чему важи:

$$(b_1 - b_2)^2 + (a_1 - a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) < 0.$$

Доказати да тада оба полинома имају реалне корене и да се између два корена сваког од тих полинома налази корен оног другог.

5. Колико има пермутација π скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је производ $(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 2)\ldots(\pi_n - n)$ непаран број?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Трећи разред – А категорија

1. Нека $S(n)$ означава збир цифара природног броја n. Наћи све бројеве n такве да је $S(n) = S(2n) = \ldots = S(n^2)$.

2. Нека су E и F тачке на страницама AC и AB троугла $\triangle ABC$ такве да је $EF \parallel BC$. Доказати да пресечне тачке кругова над пречницима BE и CF припадају висини из темена A.

3. У четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle DAB = 150^\circ$, $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABD = 120^\circ$ и $\sphericalangle DBC - \sphericalangle ABD = 60^\circ$. Наћи $\sphericalangle BDC$.

4. Нека за позитивне реалне бројеве x и y важи

$$x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4.$$

Доказати да је

$$x^3 + y^3 \leqslant 2.$$

5. Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}$, међу свим природним бројевима који садрже у свом декадном запису само цифре 1, 9 и 2 (и при том се свака од њих бар једном појављује у том запису) може наћи бар један који је дељив са 2^n.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ број $a \cdot 2^n + b$ је потпун квадрат. Доказати да је $a = 0$.

2. У круг k је уписан шестоугао $ABCDEF$, при чему су странице AB, CD и EF једнаке полупречнику круга k. Доказати да средишта преостале три странице представљају врхове једнакостраничног троугла.

3. Ако су $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ сви делиоци природног броја $n > 1$, доказати да је

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

4. Низ $\{a_i\}$ задат је рекурентно:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}, \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Доказати да су сви чланови тог низа цели бројеви.

5. Дат је јединични круг и у њему 800 тачака, од којих ниједна није центар круга. Познато је да се међу датим тачкама не налазе 3 колинеарне. Доказати да мала Ангелина може наћи кружни исечак од $45°$ који садржи тачно 100 тачака. Мала Ангелина не сме да сече круг по правама које садрже неку од датих тачака.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Први разред – Б категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2004?
(Трапез је четвороугао који има тачно две паралелне странице!)

2. Нека су A_1, B_1, C_1 редом пресечне тачке симетрала унутрашњих углова из темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Доказати да је центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ ортоцентар троугла $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Нека су a, b и c различити цели бројеви. Показати да је и

$$m = \frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

такође цео.

4. Доказати да се број

$$\underbrace{11...11}_{2005}\underbrace{22...22}_{2005}$$

може написати као производ два узастопна природна броја.

5. Квадрат 2×2 подељен је на 4 квадратића 1×1. Сваки од квадратића је обојен црвеном, плавом или белом бојом.
а) Колико има различитих бојења?
б) Колико има различитих бојења у којима се све три боје појављују?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$1\underbrace{000\ldots00}_{2^{2004}+2^{1000}-1}1$$

сложен.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужима BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је

$$\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle AC_1B = 90^\circ.$$

Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

3. Реални бројеви x и y задовољавају систем једнакости

$$\begin{aligned} x + y + \frac{x}{y} &= 10 \\ \frac{x(x+y)}{y} &= 20 \quad . \end{aligned}$$

Пронађите суму свих могућих вредности израза $x + y$.

4. Решити неједначину

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

5. Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n-1} < 2\sqrt[3]{n}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити једначину
$$\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$$
у скупу позитивних реалних бројева.

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дата са
$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5},$$
за свако $x \in \mathbb{R}$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

3. У четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle DAB = 150^\circ$, $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABD = 120^\circ$ и $\sphericalangle DBC - \sphericalangle ABD = 60^\circ$. Наћи $\sphericalangle BDC$.

4. Ако важи $x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = 1$, $x \cos^2 \varphi + y \sin^2 \varphi = 1$, $x \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \varphi$, $x \neq y$ доказати да важи $x + y = 2xy$.

5. Доказати да за све природне бројеве $n \geqslant 3$ важи
$$\log_{n-1} 10 + \log_{n+1} 10 > 2 \log_n 10.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити неједначину $\sqrt{5 - 2\sin\dfrac{x}{6}} \geqslant 6\sin\dfrac{x}{6} - 1$.

2. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

3. Ако су $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ сви делиоци природног броја $n > 1$, доказати да је

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

4. Доказати неједнакост:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

5. Израчунати површину правилне четворостране призме запремине $V = \sqrt{3}$ код које је збир дужина свих ивица најмањи.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.