Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Први разред – А категорија

1. Нека су x и y ненегативни реални бројеви такви да је $x + y = 2$. Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2.$$

Када важи једнакост?

2. Дат је број 2^k, $k > 3$. Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број 2^n, где је $n > k$.

3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

4. Кружница која је уписана у троугао ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама M и N. Нека је P тачка пресека симетрале угла $\sphericalangle ABC$ и праве MN. Доказати да је површина троугла ABC два пута већа од површине троугла ABP.

5. На страницама BC, CA и AB троугла ABC уочене су тачке A_1,B_1 и C_1, редом. Нека је T тежиште троугла ABC, а T_1 тежиште троугла $A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ и $bx^2+cx+a=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$, имају заједничко решење ако и само ако важи $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a,b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T (не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Нека су a,b,c реални бројеви, такви да је $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Доказати да важи
$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geqslant 60abc.$$
Када важи једнакост?

4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?

5. Круг k у тачкама P и Q додирује краке угла $\sphericalangle pOq$. На полуправој Oq је дата тачка X, тако да пресечна тачка Z круга k и праве PX различита од P полови дуж PX. Ако је Y пресечна тачка круга k и праве OZ различита од Z, доказати да је $PX \parallel QY$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. **а)** Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ такав да за свако $k \geqslant 2$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}?$$

б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ такав да за свако $2 \leqslant k \leqslant 2002$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}}?$$

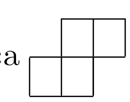
2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. На кружници је дато n тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне x и y важи

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

2. Наћи најмањи природан број који је четири пута мањи од броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку.

3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

4. Ако су x, y, z, u природни бројеви већи од 1, такви да важи $xy = zu$, доказати да је број

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$

сложен природан број.

5. Дат је полукруг над пречником AB и на њему тачке C и D тако да је $\sphericalangle CSD$ прав, где је S средиште дужи AB. Нека је E пресек правих AC и BD, а F пресек правих AD и BC. Доказати да је $EF \perp AB$ и $EF = AB$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=2.$$

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Дата је квадратна једначина $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу $(0,1)$, доказати да је $a(2c+b)<0$.

4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од 120° уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга $2+\sqrt{19}$.

5. Доказати да је број $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$ цео и израчунати га.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA,SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a, BS = b$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6ay & + & z & = & 6 \\ x & + & 6y & + & az & = & 1. \end{array}$$

3. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвесног четвороугла. Доказати да важи $P \leqslant \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$. Када важи једнакост?

4. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD, редом, такве да је $EF \| AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

5. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos\alpha = \text{tg}\beta$, $\cos\beta = \text{tg}\gamma$ и $\cos\gamma = \text{tg}\alpha$, доказати да је $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Наћи $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x(x^{2003}-1)-2003(x-1)}{(x-1)^2}$.

3. Решити систем

$$x-y+z=6,\quad x^2+y^2+z^2=14,\quad x^3-y^3+z^3=36.$$

4. Одредити тачку на елипси $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ у првом квадранту, такву да тангента на елипсу у тој тачки гради са координатним осама троугао најмање површине.

5. Дат је низ тачака $T_i(x_i,y_i)$ у xOy равни, тако да је

$$x_0=1,\ y_0=0 \text{ и } x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n,\ y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n \text{ за } n\geqslant 0.$$

У ком квадранту се налази тачка T_{2003}?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.