ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Први разред, А категорија

1. Нека је X унутрашња тачка троугла ABC, а T његово тежиште. Нека су M, N тачке које припадају страници BC, P, Q тачке које припадају страници CA, R, S тачке које припадају страници AB, тако да важи

$$MQ \parallel AB, \quad PS \parallel BC, \quad RN \parallel CA \quad \text{и} \quad MQ \cap PS \cap RN = \{X\}.$$

Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи MN, PQ, RS, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{XT}\,.$$

2. Од 16 људи, међу којима су по 4 из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати 6.

(а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?

(б) Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

4. Да ли постоји бијекција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f\,(f(x)) - f(x) = 56x + 2\,008\,?$$

5. Нека је S средиште дужи AB, а C и D тачке које припадају полукружници над пречником AB, тако да C припада луку AD и да је $\sphericalangle CSD = 90^\circ$. Нека је E пресечна тачка правих AC и BD, а F пресечна тачка правих AD и BC. Доказати да вектор $\overrightarrow{EF}$ не зависи од избора тачака C и D.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Први разред, Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n такве да је $\dfrac{2n+1}{n+2}$ природан број.

2. Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$.

(а) Одредити функцију f ако је $f(x) = g\left(g(x)\right) - g(x)$.

(б) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. У зависности од A и B одредити које од следећих скуповних формула су тачне:

(а) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$;

(б) $A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;

(в) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$;

(г) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;

(д) $A \cup B = A \Rightarrow A \subseteq B$.

4. За које вредности реалног параметра a једначина

$$\big||x| - 1\big| = a$$

има максималан број различитих реалних решења?

5. Од 16 људи, међу којима су по 4 из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати 6.

(а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?

(б) Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Други разред, А категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

2. Нека је је $X = \left\{ f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (скуп парабола).

(а) Доказати да све параболе из X секу x-осу.

(б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових парабола.

(в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ најмањи?

3. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ такве да је број $\dfrac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + 10z^2 + 3}$ реалан.

4. Нека су a, b, x и y реални бројеви за које важи $a+b = x+y$ и $a^4+b^4 = x^4+y^4$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a^n + b^n = x^n + y^n$.

5. Племе Вгаб има азбуку која садржи само слова А, Б, В и Г. На њиховом језику су смислене све речи које у свом запису немају два иста слова на суседним местима, док остале то нису. Колико има смислених осмословних речи у језику овог племена које свако слово азбуке садрже тачно два пута?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Други разред, Б категорија

1. Да ли постоји реалан број a за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење?

2. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, који су конјуговани свом квадрату.

3. Нека су a, b, c странице, а s полуобим троугла ABC. Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c, редом. Доказати да је

$$\frac{3}{2} \cdot s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

4. Нека је је $X = \left\{ f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (скуп парабола).

(а) Доказати да све параболе из X секу x-осу.

(б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових парабола.

(в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ најмањи?

5. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3}x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x.$$

2. Нека су x, y, z реални бројеви, такви да је

$$x \geqslant 4, \quad y \geqslant 5, \quad z \geqslant 6 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 90.$$

Доказати неједнакост $x + y + z \geqslant 16$. Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

3. Нека су m и n различити природни бројеви. Доказати да постоји комплексан број z модула 1 такав да је

$$|1 - z^m + z^n| \geqslant 2.$$

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ потпуни системи остатака по модулу n. Доказати да $r_1t_1, r_2t_2, \ldots, r_nt_n$ није потпун систем остатака по модулу n.

5. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Доказати неједнакост

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right).$$

Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0, \\ x & + & (m-1)y & + & 2z & = & 1, \\ -x & + & 2y & + & (2m-1)z & = & 3, \\ x & + & y & + & 4z & = & 4. \end{array}$$

2. Површина праве купе је четири пута већа од површине њене основе. Одредити однос висине и полупречника основе те купе.

3. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

4. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3} x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Четврти разред, А категорија

1. Израчунати површину правилне четворостране призме чија је запремина $V = 12\sqrt{3}$, а збир дужина свих ивица је најмањи могући.

2. Нека је k најмањи број потеза који је потребно начинити за пребацивање скакача из доњег левог угла у горњи десни угао шаховске табле 8×8. На колико различитих начина се то може учинити у тачно k потеза?

3. Нека је H ортоцентар, а O центар описане кружнице троугла ABC. Нормална пројекција темена A на праву BC припада симетрали странице AC. Одредити $\dfrac{CH}{BO}$.

4. Нека су m и n различити природни бројеви. Доказати да постоји комплексан број z модула 1 такав да је

$$|1 - z^m + z^n| \geqslant 2.$$

5. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ природних бројева, који је, за свако N, периодичан по модулу N почев од неког члана и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Доказати да је и низ $(a_n^{a_n})_{n\geqslant 1}$, за свако N, периодичан по модулу N почев од неког члана.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -1, \\ -4x & - & 2y & + & az & = & a, \\ (a-1)x & + & y & + & z & = & 2. \end{array}$$

2. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, при чему је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ и $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 60^\circ$.

3. Израчунати површину правилне тростране пирамиде, основне ивице $a = 2$, чија су сва три ивична угла при врху прави.

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\log_2\left(x(1-x)\right) = -2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|.$$

5. Нека је k најмањи број потеза који је потребно начинити за пребацивање скакача из доњег левог угла у горњи десни угао шаховске табле 8×8. На колико различитих начина се то може учинити у тачно k потеза?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.