Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Први разред – А категорија

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи сва решења једначине
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2004 \cdot x \cdot y \cdot z$$
у скупу целих бројева.

4. Нека је дат скуп $S = \{s, i, c, g\}$.
а) Колико има релација у скупу S које нису симетричне?
б) Колико има антисиметричних релација у скупу S?

5. Доказати или оповргнути: Међу произвољних 6 природних бројева увек је могуће наћи 3 тако да су свака 2 узајамно проста или 3 тако да сва 3 имају заједнички делилац већи од 1.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Други разред – А категорија

1. Нека је AB пречник круга k и нека се тетиве AD и BC тог круга секу у тачки E. Доказати да

$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$

не зависи од избора тачака C и D.

2. Нека је O центар круга описаног око конвексног четвороугла $ABCD$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD. Ако су средишта дужи AD, BC и OE колинеарне тачке доказати да је тада испуњено или $AB = CD$ или је $\sphericalangle AEB = 90^\circ$.

3. Наћи сва решења (a, b) у скупу рационалних бројева једначине:

$$(a + b\sqrt{2})^2 = 11 + 14\sqrt{2}.$$

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$mx^2 + (2m + 1)x + (m - 3) = 0$$

има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 7 чланова одржала укупно 10 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 11 чланова одржала укупно 5 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из C, а тачка E подножје висине из D у $\triangle BCD$. Нека је F тачка дужи DE таква да је $DF : FE = BD : DA$. Доказати да су праве CF и AE узајамно нормалне.

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина
$$\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n?$$

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Бисектриса унутрашњег угла у темену A троугла $\triangle ABC$ сече страницу BC у тачки K. Центри уписаног круга троугла $\triangle ABK$ и описаног круга троугла $\triangle ABC$ се поклапају. Наћи углове троугла $\triangle ABC$.

2. Наћи сва пресликавања $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која су "на" (сурјекције) и за која важи:

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y) \qquad \text{за } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Дата је функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n}, \qquad x \geqslant 0.$$

Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције $f(x)$.

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. У равни је задат n-тоугао чија темена имају целобројне координате, а странице су дужине $\sqrt{2005}$. За које $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 3)$ је то могуће?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Први разред – Б категорија

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи троцифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрен број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.

4. Колико има има дијагонала конвексног 15-тоугла које спајају по два његова темена између којих се (посматрано у оба могућа смера) налазе бар три друга темена?

5. Висина AD из темена A троугла $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $BD : DC = 3 : 1$. Ако је $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ правоугли.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$A = \left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

цео и наћи његову вредност.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100.$$

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$mx^2 + (2m+1)x + (m-3) = 0$$

има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?

5. У трапезу $ABCD$ краћа дијагонала AC нормална је на основицама $AB = a$ и $CD = b$. Ако је $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$, наћи дужине кракова BC и AD.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α, β и γ углови такви да важи $\beta = 60^\circ + \alpha$ и $\gamma = 60^\circ + \beta$. Доказати да је вредност израза

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$$

цео број.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи

$$x^2 + 8xy + 25y^2 = 225.$$

4. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом од 60°. Одредити однос дужина страница паралелограма $AB : AD$, ако је однос дужина дијагонала $AC : BD = \sqrt{19} : \sqrt{7}$.

5. У правилној тространој пирамиди, чија је ивица основе a, угао између ивица при врху једнак је α ($\alpha \leqslant 90^\circ$). Одредити површину пресека пирамиде и једне равни која садржи једну ивицу основе и нормална је на наспрамну бочну ивицу.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Три реална броја, различита од нуле, образују аритметички низ, а квадрати тих бројева у истом поретку, образују геометријски низ. Наћи количник тог геометријског низа.

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Дата је функција
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n}, \qquad x \geqslant 0.$$
Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције $f(x)$.

4. Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} \right).$$

5. Доказати да једначина
$$\sin\left(\tfrac{1}{7}\arccos x\right) = 1$$
нема реалних решења.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.