

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Први разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви
$$p = b^c + a, \quad q = a^b + c \text{ и } r = c^a + b$$
прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.
3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
4. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, али највише две птице?
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да
$$b \mid a^2 + 1 \text{ и } b \mid a^3 - 1.$$
3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.
4. Решити једначину $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3$.
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geq 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?

2. а) Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у \mathbb{N} .

3. Једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

има комплексан корен $a + bi$, где су $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ и $q, b \neq 0$. Показати да је $aq > 0$.

4. Доказати да је број

$$n^{2003} + n + 1$$

сложен за сваки природан број n , $n > 1$.

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $\triangle ABC$ троугао такав да је $\sphericalangle ACB \geq 120^\circ$. Нека је R полупречник описаног круга тог троугла. Доказати:

$$3R \geq AC + BC + \frac{AB}{\sqrt{3}}.$$

У ком случају важи једнакост?

2. Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у \mathbb{N} .
3. На свечаној смотри поводом дана Војске СЦГ изабрано је из сваког од 4 различита рода (пешадија, артиљерија, ваздухопловство и морнарица) по 4 војника различитих чинова (по један десетар, водник, поручик и капетан). Помозите мајору, задуженом за прославу, који је добио наређење да тих 16 војника размести у строј облика квадрата, тако да у сваком реду и свакој колони буду смештена 4 војника из различитих родова и са различитим чиновима.
4. Доказати да је број
$$n^{17} + n^{11} + n^{2004} + n^8 + 1$$
 сложен за сваки природан број n , $n > 1$.
5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Први разред – Б категорија

1. Цифре a и b су различите и такве да важи
 $\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{aba} = \overline{abaaba}$.
Дешифровати ову једнакост.
2. У троуглу $\triangle ABC$ ($BC > CA$) је $\sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 45^\circ$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, израчунати величину угла $\sphericalangle BAD$.
3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
4. Колико има једнакокраких троуглова, чије су странице целобројне, а обим једнак 30cm ?
5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) конструисана је висина CD . Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече праву CD у тачки P , а симетрала угла $\sphericalangle BCD$ сече праву BD у тачки Q . Доказати да је $PQ \parallel BC$.
2. Испитати да ли квадратна једначина
$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0,$$
где су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.
3. Решити једначину $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - |3x - 2| - 3x = 1$.
4. Дата је једначина $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз
$$(x_1 - b)(x_2 - b)$$
не зависи од a , при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.
5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати вредност израза
 $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$
без примене калкулатора и таблица.
2. Доказати неједнакост $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2$.
3. Равни α и β секу се по правој c . Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c . Ако је γ угао између праве p и равни β , доказати да важи
 $\sin \gamma = \sin \varphi \sin \psi$.
4. Израчунати вредност детерминанте
$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$$
.
5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева:
$$\begin{aligned} x^3 y^3 z^4 &= 1 \\ x^2 y^4 z^4 &= 2 \\ x^2 y^3 z^5 &= 3 \end{aligned}$$
.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Скуп природних бројева разбијен је у групе на следећи начин:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$$

Наћи збир чланова n -те групе.

2. Нека су x_1, x_2, x_3 корени полинома $x^3 + mx + n$, ($n \in \mathbb{Z}$). Доказати да је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ цео број дељив са 3.

3. У правоуглом троуглу у коме је хипотенуза $c = 8$ и оштар угао $\alpha = 60^\circ$ уписан је правоугаоник максималне површине, тако да му једна страница припада хипотенузи троугла. Одредити дужине страница тог правоугаоника.

4. Наћи реална решења система једначина

$$\frac{1}{1 + (x - y)^2} = z + 4, \quad \sqrt{z + 3} + 2x = 8.$$

5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева:

$$\begin{aligned} x^3 y^3 z^4 &= 1 \\ x^2 y^4 z^4 &= 2 \\ x^2 y^3 z^5 &= 3 . \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.