ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Први разред, А категорија

1. Да ли постоје природни бројеви a, b, c такви да је

$$2010 = (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)?$$

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2 и права p која сече k_1 у тачкама A и B, а k_2 у тачкама C и D. Пресечне тачке тангенти кружнице k_1 у тачкама A и B са тангентама кружнице k_2 у тачкама C и D су K, L, M и N. Доказати да су K, L, M и N концикличне тачке.

3. Одредити све природне бројеве n такве да је број

$$\left|n-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\right|+\left|3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\right|$$

рационалан.

4. У једнакокраком троуглу ABC $(AB = BC)$ је одабрана тачка M таква да је $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ABC$. Тачка N на дужи AM задовољава $\sphericalangle BNM = \sphericalangle ABC$. Доказати да је $BN = CM + MN$.

5. Фигура површине веће од 1006 може се сместити у правоугаоник димензија 2011×1. Доказати да постоје две тачке те фигуре (на рубу или унутрашњости) које су на растојању тачно 1.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Други разред, А категорија

1. Пера и Мика играју следећу игру: они наизменично уписују реалне бројеве на место неког од до тада неуписаних коефицијената a, b, c једначине

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пера игра први и он добија ако једначина има и једно позитивно и једно негативно решење, а Мика добија у осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Изван квадрата је конструисан полукруг над пречником AB. Одредити тачку P са овог полукруга тако да израз

$$AP^2 + CP^2$$

има максималну вредност.

3. Дат је троугао BEC. Над страницама BC и CE са спољашње стране троугла констуисани су квадрати $BCDA$ и $CEFG$. Ако је CK тежишна дуж троугла CBE, а CL висина троугла DCG, доказати да су тачке C, K и L колинеарне.

4. Одредити минималан број коња који се могу поставити на шаховску таблу димензија 7×7 тако да свако поље табле буде тучено неким од њих.

5. Нека је $n > 28$ савршен број дељив са 7. Доказати да је n дељив са 49. (Природан број n је савршен ако је збир свих његових позитивних делилаца мањих од n једнак n. Нпр. 6 је савршен, јер је $1 + 2 + 3 = 6$.)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Трећи разред, А категорија

1. На страници AD правоугаоника $ABCD$ ($AB < BC$) изабрана је тачка E тако да је $BE = BC$. Нормала из темена C на дијагоналу BD сече продужетак странице AB у тачки F. Доказати да је троугао BEF правоугли.

2. Који је највећи број жетона који се могу поставити на шаховску таблу димензија 2012×2012 (на свако поље се поставља највише један жетон) тако да на свакој хоризонтали, вертикали и дијагонали ове табле буде паран број жетона?
(Под дијагоналом шаховске табле подразумевамо низ поља табле чији центри леже на правој која је паралелна са једном од две дијагонале правоугаоника који чини границу табле.)

3. Нека је P раван. Доказати да не постоји пресликавање $f : P \to P$ такво да за сваки конвексан четвороугао $ABCD$ равни P, тачке $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ и $f(D)$ чине темена конкавног четвороугла.
(Величине углова четвороугла су различите од $180°$.)

4. Нека је $A = (2011 + i)^{2010} + (2011 - i)^{2010}$.

(а) Доказати да је A цео број.

(б) Одредити остатак при дељењу броја A са 101.

5. Низ $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ реалних бројева задовољава $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$2a_n + 3a_{n+2} \leqslant 5a_{n+1}, \text{ за све } n \geqslant 0.$$

Доказати да за све $n \geqslant 0$ важи

$$a_n \leqslant 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Четврти разред, А категорија

1. У троуглу ABC важи:

(1) $DE \parallel AB$, $D \in AC$ и $E \in BC$;

(2) $DF \parallel CB$, $F \in AB$;

(3) $AE \cap DF = \{G\}$ и $CF \cap DE = \{H\}$.

Доказати да је $GH \parallel AC$.

2. Дата је табла димензија 3×4. Два играча наизменично постављају домине на поља табле (свака домина поставља се на два поља) које се не смеју преклапати. Победник је играч који постави последњу домину.

(а) На колико различитих начина се могу поставити две домине?

(б) Колико има различитих позиција након постављене две домине?

(в) Који од играча има добитну стратегију?

(Домине су правоугаоници димензија 1×2. Играчи на располагању имају довољан број домина.)

3. Дато је n тачака x_1, $x_2, \ldots,$ x_n на сегменту $[0,1]$. Доказати да постоји тачка $x \in [0,1]$ тако да је просечно растојање од тачке x до тачака x_1, $x_2, \ldots,$ x_n једнако $\dfrac{1}{2}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Дати су произвољни позитивни бројеви $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2n}$ и њихова произвољна пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$. Доказати да за свако $t \geqslant 0$ важи неједнакост

$$(a_1a_2 + t)(a_3a_4 + t) \cdot \ldots \cdot (a_{2n-1}a_{2n} + t) \leqslant (b_1b_2 + t)(b_3b_4 + t) \cdot \ldots \cdot (b_{2n-1}b_{2n} + t).$$

5. Нека су p и q прости бројеви, при чему је $p = 2q + 1$. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да важи

$$p \mid q^n + n^q.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Први разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$|x-1|-|x-2|+|x-3|=a$$

има тачно четири реална решења?

2. На страницама AB и BC паралелограма $ABCD$ дате су тачке M и N тако да је $AM : MB = 2 : 1$ и $BN : NC = 1 : 1$. Ако је S пресечна тачка дужи AN и DM, наћи однос $AS : SN$.

3. Три друга Аца, Бојан и Вељко погађају непознат шестоцифрен број, састављен од цифара 1,2,3,4,5,6, при чему се ове цифре не понављају. Они дају следеће претпоставке за непознат број:

- Аца: 123456.
- Бојан: 245163.
- Вељко: 463215.

Ако се зна да је Аца погодио тачан положај 3 цифре, Бојан 3 цифре и Вељко 1 цифре, одредити непознати број.

4. Да ли постоје природни бројеви a, b, c такви да је

$$2010=(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)?$$

5. Дат је паралелограм $ABCD$. Нека су $ABB'A'$, $BCC''B''$ и $CDD'C'$ квадрати конструисани у спољашњости овог паралелограма и нека су O_1, O_2 и O_3 њихови центри, редом. Доказати да су троуглови O_1BO_2 и O_3CO_2 подударни.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Други разред, Б категорија

1. На колико начина се може поређати 10 различитих књига на полицу, али тако да за пет одређених важи да никоје две нису једна до друге?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E у унутрашњости, а тачка F у спољашњости овог квадрата тако да су троуглови ABE и CBF једнакостранични. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне.

3. За реалан број d кажемо да је *добар* ако је за сваки реалан број x испуњено

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leqslant d.$$

(а) Доказати да је 4 добар број.

(б) Наћи све добре бројеве.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) угао код темена C је 108°. Наћи однос дужине основице и дужине крака.

5. Нека су b и c природни бројеви, а a прост број. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је $a < b$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Трећи разред, Б категорија

1. Око дате лопте описана је права призма чија је основа ромб. Дужа дијагонала призме гради са равни основе угао α. Наћи оштар угао ромба.

2. Колико има четвороцифрених бројева који се у бројном систему са основом 10 записују помоћу највише две различите цифре?

3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-2}+x>3.$$

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$4^{x\arcsin x}+4^{x\arccos x}=2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

5. Нека су на крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC изабране тачке M и N, редом. Права која садржи средиште дужи MN и паралелна је основици BC сече краке у тачкама K и L. Доказати да је дужина ортогоналне пројекције дужи MN на основицу троугла једнака дужини дужи KL.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $\log_{10} 2 = a$ и $\log_{10} 3 = b$, одредити $\log_5 216$ у функцији од a и b.

2. Нека је $k > 0$, а A и B, редом, тачке пресека параболе $y = x^2$ са правама

$$y = kx \quad \text{и} \quad y = -\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot x$$

различите од координатног почетка O. Одредити (ако постоје) све вредности k за које је троугао OAB оштроугли.

3. Одредити (ако постоји) реалан број a тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}, & x \neq 64 \\ a, & x = 64 \end{cases}$$

буде непрекидна за све $x \geqslant 0$.

4. У троуглу ABC је $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Означимо са D средиште странице BC, а са E подножје висине из темена A овог троугла. Ако је $\sphericalangle CAD = 15^\circ$, одредити величину $\sphericalangle BAE$.

5. Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за 7 већа од најмање цифре?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.