ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Први разред, А категорија

1. Нека су M и N различите тачке које не припадају правој p. Конструисати троугао ABC, такав да страница AB припада p, а тачке M и N су подножја висина троугла из темена A и B, редом.

2. Нека су p, q, r реални бројеви за које важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0 \quad \text{и} \quad p + q + r = 1.$$

Доказати да за све реалне a, b, c важи

$$a^2 + b^2 + c^2 = (pa + qb + rc)^2 + (qa + rb + pc)^2 + (ra + pb + qc)^2 .$$

3. За сваку тачку првог квадранта одредити праву која пролази кроз ту тачку, а са позитивним деловима координантних оса гради троугао минималне површине.

4. Одредити све природне бројеве n за које је тачно тврђење:

> Природан број x дељив је са n ако и само ако је збир цифара броја x дељив са n.

5. Два тима, сваки са по 6 фудбалера, имају на располагању 4 шортса и 4 мајице, у свакој од следећих боја – црвеној, плавој и белој. На колико начина фудбалери могу да се обуку за утакмицу тако да сваки фудбалер обуче шортс и мајицу, ако се зна да сваки тим мора да има своју карактеристичну боју?

Напомена. Боја је карактеристична за тим ако сваки играч тог тима има бар један одевни предмет те боје, а да притом нико из супротног тима нема ниједан одевни предмет те боје.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Први разред, Б категорија

1. Доказати да је број

$$2\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2}$$

рационалан.

2. Нека су D и E тачке које припадају хипотенузи BC правоуглог троугла ABC, тако да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати $\sphericalangle DAE$.

3. Колико целобројних решења има једначина

$$|x| + |y| = 2009?$$

4. Нека је r полупречник уписане кружнице, а h висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла. Доказати да важи

$$\frac{2}{5} < \frac{r}{h} < \frac{1}{2}\,.$$

5. На колико начина се 20 карата, међу којима су четири даме, може поделити на две групе од по 10 карата, тако да у једној групи буде три даме, а у другој једна дама?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}=1.$$

2. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји $\varphi \in \mathbb{R}$ тако да је

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{n-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\,.$$

Да ли тврђење важи ако је $n \in \mathbb{Z}$?

3. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост

$$P \leqslant \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\,.$$

Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

4. На колико начина се b белих, c црвених и p плавих куглица може поређати у низ, тако да се никоје 2 плаве куглице не налазе једна до друге (куглице исте боје се не разликују)?

5. Одредити све природне бројеве n за које је $2^n+3^n+4^n$ потпун квадрат.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Други разред, Б категорија

1. **(а)** Одредити остатак при дељењу броја $\left(5^{41}+2\right)\left(3^{105}-1\right)+357\cdot\left(5^{70}+1\right)$ са 4.

(б) Испитати да ли је број $2^{60}+3^{70}$ дељив са 13.

2. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Права PQ, таква да је $P \in k_1$ и $Q \in k_2$, садржи тачку A. Доказати да однос $\dfrac{BP}{BQ}$ не зависи од праве PQ.

3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & \sqrt{x_2} & = & 1, \\ x_2 & + & \sqrt{x_3} & = & 1, \\ x_3 & + & \sqrt{x_1} & = & 1. \end{array}$$

4. Око круга полупречника r описан је четвороугао $ABCD$. Тачка додира дели страницу AB на одсечке дужина a и b, а страницу AD на одсечке дужина a и c. Доказати да важи

$$r > \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\,.$$

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}=1.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да важи $\sin\dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{\sqrt{n^2+9}}$.

2. Нека су a, b и c комплексни бројеви, тако да тачке које им одговарају у комплексној равни представљају темена једнакостраничног троугла. Доказати да једначина

$$az^2 + bz + c = 0$$

у скупу комплексних бројева има бар једно решење јединичног модула.

3. Нека је S центар уписане кружнице оштроуглог троугла ABC. Уписана кружница додирује страницу AB тачки X. Права XS сече уписану кружницу у тачки M (различитој од X). Нека је X' пресечна тачка праве CM и странице AB, а L тачка на дужи $X'C$, тако да важи $X'L = CM$. Доказати да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи $AB = AC$.

4. Одредити највећи заједнички делилац свих елемената скупа

$$\left\{n^{13} - n \mid \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7, тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 1)$. Одредити вектор $\vec{x}$, који припада равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогоналан је на вектор $\vec{b}$ и важи $\vec{a} \cdot \vec{x} = 7$.

2. Нека су AB и AC тетиве круга полупречника R. Тачка M припада правој AB, а њено растојање од праве AC је једнако AC. Тачка N припада правој AC, а њено растојање од праве AB је једнако AB. Израчунати MN.

3. Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина

$$(p-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$$

има бар једно решење.

4. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка странице a и нека тачка P полови AB, тачка Q полови BC, а тачка R припада дужи CC_1, тако да је $CR : RC_1 = 1 : 2$. Одредити обим и површину фигуре која се добија у пресеку равни PQR и коцке.

5. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да важи $\sin \dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{\sqrt{n^2+9}}$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, А категорија

1. **(а)** Доказати да за $y \geqslant 2$ важи $2e^y > y^3 + 4$.

(б) Доказати да је функција $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x) = \ln\left(e^{x + \frac{1}{x}} - 1\right)$$

конвексна.

2. У неправоуглом троуглу ABC, тачка H је ортоцентар, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека је X пресек правих AH и EF, а Y пресечна тачка кружница описаних око троугла AHC и EBC, различита од C. Доказати да су тачке C, X и Y колинеарне.

3. Одредити последње две цифре броја $2^{2^p} + 1$, где је p прост број.

4. Нека је $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3}$. Одредити све полиноме p са целобројним коефицијентима, за које важи

1° $p(x) = p(\varepsilon x)$ за свако $x \in \mathbb{C}$;

2° $p(1) = 2001$;

3° $p(2) = 2009$.

5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7, тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a, тако да једначина

$$x^3 - 3x^2 - 9x = a$$

има три реална и међусобно различита решења.

2. Дата је зарубљена купа у коју се може уписати лопта. Површина омотача те зарубљене купе је четири пута већа од разлике површина основа. Одредити однос запремина лопте и зарубљене купе.

3. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots .$$

Доказати да је број S коначан и израчунати га.

4. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост

$$P \leqslant \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\,.$$

Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

5. Одредити све вредности реалног параметра a за које је скуп решења неједначине

$$\log_{x+a}\left(x^2 + a^2\right) \geqslant 2$$

коначан.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.