Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – А категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

2. Дата су два круга који се додирују изнутра у тачки A. Ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга конструише права која додирује унутрашњи круг у тачки C и сече спољашњи круг у тачки D, доказати да је права AC бисектриса угла BAD.

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. У зависности од природног броја n наћи највећи заједнички делилац бројева $n^2 + 1$ и $(n+1)^2 + 1$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – Б категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

2. Бисектриса унутрашњег угла $\sphericalangle ACB$ троугла ABC уједно је и бисектриса угла који образује пречник CD описаног круга и висина конструисана из темена C. Доказати!

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1,\ 2,\ldots,\ 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. Познато је да је површина троугла $P = \frac{15}{4}$ као и да важе једнакости $a + c = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Наћи странице a, b, c овог троугла.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Други разред – А категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

2. За које $a \in \mathbb{R}$ су сва решења једначине

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

реална и задовољавају услов $|x| < 1$?

3. Нека је $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ функција дефинисана на следећи начин

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} NZD(i, n), \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Наћи $f(2^{2007})$.

4. Да ли има више релација еквиваленције или релација поретка на скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$?

5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Други разред – Б категорија

1. Одредити остатке при дељењу

(1) броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13,

(2) броја $9^{222} + 4^{333}$ са 5.

2. Центар уписаног круга и центар описаног круга троугла ABC симетрични су у односу на страницу AB. Израчунати унутрашње углове троугла ABC.

3. У зависности од реалног параметра a, одредити број различитих реалних решења једначине

$$|x^2 + x + a| = x.$$

4. Решити неједначину $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

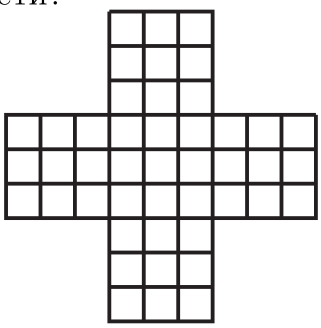
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – А категорија

1. Замак има форму неконвексног 12-тоугла (као на слици) са укупно 45 квадратних одаја. Између сваке две одаје које имају заједнички зид постоје врата. Туриста креће из неке одаје и жели да обиђе што више одаја и да се врати у полазну одају, али тако да у сваку одају уђе највише једанпут. Колико највише одаја он може овако да посети?



2. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm ... \pm x \pm 1$ који имају све корене реалне.

3. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

4. Наћи све природне бројеве n мање од 100 којима је збир цифара у декадном запису једнак збиру цифара у бинарном запису.

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

2. За које вредности реалног параметра p једначина

$$\frac{\log px}{\log(x+1)} = 2$$

има јединствено решење?

3. Нека је $AB = 6\sqrt{2}$ ивица квадратне основе правилне пирамиде $ABCDV$ и $TV = 3$ њена висина, где је T пресек дијагонала квадрата $ABCD$. Израчунати угао између праве ℓ одређене са дужи TH и равни α троугла ABV, где је H ортоцентар троугла ABV.

4. Решити систем једначина

$$a_1+b_1 = 23 \quad a_1+d+b_1q = 21 \quad a_1+2d+b_1q^2 = 22 \quad a_1+3d+b_1q^3 = 29$$

где су a_1, b_1, d и q непознати реални бројеви.

5. Решити неједначину

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – А категорија

1. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

2. За дати природан број n, у скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ... + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ {x_1}^1 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^n &= n\ . \end{aligned}$$

3. Нека су m, n и k природни бројеви. Познато је да се правоугаона таблица димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) правоугаоницима $1 \times k$. Доказати да је бар један од бројева m и n дељив са k.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x + y = 1$$

$$(x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = 85.$$

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Уписани круг у троугао ABC додирује стране BC, AC, AB троугла у тачкама A', B', C'. На описаном кругу троугла ABC означимо са A'' средиште лука BC који не садржи тачку A, са B'' средиште лука AC који не садржи тачку B, са C'' средиште лука AB који не садржи тачку C. Доказати да се праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ секу у једној тачки.

2. а) Ако су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$, тада ако за сваки реални број x важи $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \operatorname{arctg} x = 0$, онда је $\alpha = \beta = 0$. Доказати.
б) Да ли важи претходно тврђење ако су $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ и $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$?

3. Решити неједначину

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

4. Доказати да у сваком тетраедру постоји теме такво да се од ивица које из њега полазе може конструисати троугао.

5. Одредити чланове a_1, a_2, a_3, a_4 аритметичког и b_1, b_2, b_3, b_4 геометријског низа ако је

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_2 + b_2 = 21 \quad a_3 + b_3 = 22 \quad a_4 + b_4 = 29.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.