Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Први разред – А категорија

1. Доказати да кружница која садржи два темена и ортоцентар троугла има исти полупречник као и кружница описана око тог троугла.

2. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.

3. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да је у сваком начину путовања сваки део пута пређен највише једанпут?

4. Шта је веће

$$\frac{1,\overbrace{111\ldots1}^{2005\,\text{цифара}}}{1,\underbrace{111\ldots1}_{2006\,\text{цифара}}} \quad \text{или} \quad \frac{1,\overbrace{0101\ldots01}^{4010\,\text{цифара}}}{1,\underbrace{0101\ldots01}_{4012\,\text{цифара}}}?$$

5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Први разред – Б категорија

1. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.

2. Ради продаје, било је потребно неке од датих 555 парцела поделити на мање. Притом се свака појединачна парцела могла поделити или на 3 или на 4 дела. Са дељењем парцела се стало када је број парцела био 4 пута већи од броја извршених деоба. Колико је најмање деоба извршено?

3. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке P и Q су средине страница AD и BC. Ако важи да је $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$ доказати да је четвороугао $ABCD$ трапез.

4. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Нека је $AD \cap BC = \{H\}$ и $CD \cap AB = \{E\}$. Симетрала угла $\sphericalangle DEA$ сече странице DA и CB у тачкама P и M, а симетрала угла $\sphericalangle DHC$ сече странице DC и BA у тачкама N и L. Доказати да је $LMNP$ ромб.

5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Други разред – А категорија

1. Наћи највећу вредност израза $4x^2 + 80x + y + 43$ под условом да важи $6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$ и $x^2 + 86x + y + 202 \geq 0$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Одредити угао α ако је

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1.$$

4. За које вредности реалног параметра α неједнакост

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cos x \geqslant 0$$

важи за све вредности x?

5. Подскуп X скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ има својство да у њему не постоје два броја чија је разлика 1 или 4. Колико највише елемената може имати скуп X?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Други разред – Б категорија

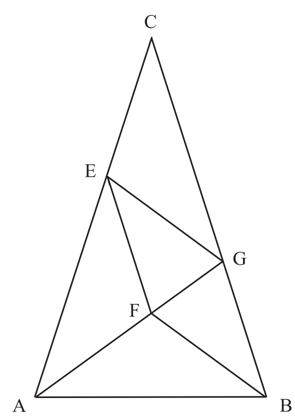
1. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b-1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y, \\ ay^2 + by + c &= z, \\ az^2 + bz + c &= x \end{aligned}$$

нема реалних решења.

2. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

3. Троугао ABC подељен је на једнакокраке троуглове. Дужи AF и BF су краци троугла ABF, BF и BG су краци троугла BFG, AF и EF краци троугла AEF, EF и EG краци троугла EFG и CE, GE краци троугла CEG. Доказати да су троуглови EFG и ABC слични и одредити коефицијент сличности.



4. Доказати да је сума реципрочних вредности свих делитеља савршеног броја N једнака 2. За број n се каже да је савршен уколико је збир свих његових делитеља (укључујући 1 и n) једнак $2n$.

5. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да је у сваком начину путовања сваки део пута пређен највише једанпут?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је полином са реалним коефицијентима $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ који има три реална позитивна корена, не обавезно различита. Одредити минималну вредност збира $a + b$.

2. Решити систем једначина:

$$2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6$$
$$\log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1.$$

3. Наћи све целе бројеве a, b, c, d за које важи $ab + cd = 5$ и $ac - bd = 4$.

4. Дато је n различитих тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих средишта дужи $\overline{A_iA_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

а) Доказати да скуп тачака $\mathcal{S}$ има бар $2n - 3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за који скуп $\mathcal{S}$ има тачно $2n - 3$ елемента.

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{8}\,.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за све $a, b > 0$ важи неједнакост

$$2(a^4 + b^4) + 17 > 16ab\,.$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Одредити угао α ако је

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1.$$

4. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{8}\,.$$

5. За два различита (неподударна) троугла кажемо да су пријатељски ако имају две једнаке странице. Скуп пријатељских троуглова називамо добрим ако сви троуглови из тог скупа имају исти пар једнаких страница. Одредити минималну вредност за $N, N > 2$, за коју је сваки скуп од N међусобно пријатељских троуглова добар скуп.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати неједнакост

$$\cos^3 x \sin x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Када важи једнакост?

2. Дато је n различитих тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих средишта дужи $\overline{A_i A_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

а) Доказати да скуп тачака $\mathcal{S}$ има бар $2n-3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за који скуп $\mathcal{S}$ има тачно $2n-3$ елемента.

3. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD је њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

4. Нека је $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Наћи број различитих реалних корена једначине $f(f(x)) = 0$.

5. На колико различитих начина се могу расподелити 7 различитих куглица у 4 кутије које се не разликују?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су x, y реални бројеви такви да је $1 \leqslant x \leqslant y$ онда из једнакости

$$x^y + y^x = x^x + y^y \quad \text{следи} \quad x = y.$$

Доказати.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. K_0 је кружница са центром у $C_0 = (0, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_1 кружница са центром у $C_1 = (1, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_2 (најмања) кружница која додирује кружнице K_0, K_1 и x-осу и K_3 кружница која на исти начин додирује кружнице K_0, K_2 и x-осу. Доказати да је за $n = 1, 2, 3$ полупречник кружнице K_n једнак $r_n = \frac{1}{2n^2}$ и да ова кружница додирује x-осу у тачки $x_n = \frac{1}{n}$.

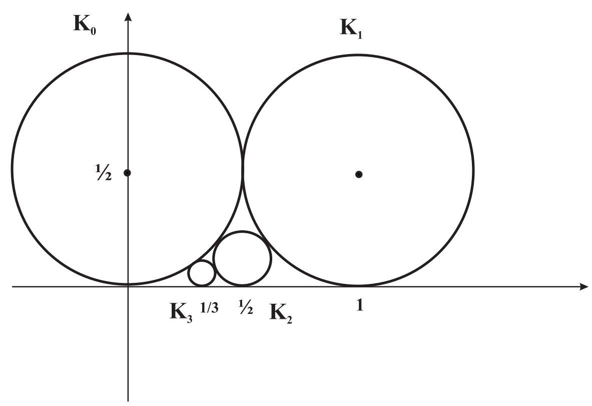


Figure 1:

4. Нека су α, β, γ углови троугла. Одредити угао α ако је

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1\,.$$

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{8}\,.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.