Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Први разред – А категорија

1. Права кроз центар описаног круга и ортоцентар троугла $\triangle ABC$ (Ојлерова права), сече унутрашњост страница CA и CB у тачкама M и N, редом, таквим да је $CM = CN$. Доказати да је $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

2. Наћи све тачке P на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ за које је збир $PA + PB + PC$ минималан.

3. Нека су x и y цели бројеви, такви да 90 дели $x^2 + xy + y^2$. Доказати да онда 900 дели xy.

4. Нека су x, y и z реални бројеви, такви да је

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18 \qquad \text{и} \qquad xy + yz + zx = 9.$$

Израчунати вредност израза $|x| + |y| + |z|$.

5. Ана и Бранко су ставили неки број жетона на поља шаховске табле 8×8. Ана је записала бројеве жетона у свакој врсти, а Бранко бројеве жетона у свакој колони. Ана је записала све различите бројеве. Да ли је могуће да су сви Бранкови бројеви различити од Аниних?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Други разред – А категорија

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачка O је пресек дијагонала. Нека су E, F и G редом пројекције тачака B, C и O на AD. Доказати да је површина четвороугла $ABCD$ једнака

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}.$$

2. Решити неједначину

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2} \geqslant 3+\sqrt{x+6}.$$

3. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $x^2+y^2 \leqslant 25$. Одредити највећу и најмању вредност израза

$$x^2+y^2+12x-16y.$$

4. Који је од бројева

$$2^{\sqrt{\log_2 2004}} \quad \text{и} \quad 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$$

већи? (Образложити одговор!)

5. Дат је низ природних бројева

$$1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$$

са особином да је $x_{n+1} \leqslant 2n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
Да ли постоје индекси i и j такви да је $x_i - x_j = 2005$?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$, тачка D је средиште странице BC, а тачка E на страници AB таква да је $AE = 2EB$. Ако је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$, наћи угао $\sphericalangle ACB$.

2. Нека је дат природан број a. Доказати да постоји бесконачно много парова природних бројева (b, c) таквих да су

$$ab + 1, \quad ac + 1 \quad \text{и} \quad bc + 1$$

потпуни квадрати.

3. Нека су a, b, c странице произвољног троугла и α, β углови наспрам страница a и b. Доказати да важи

$$a \cos\alpha + b \cos\beta \leqslant c.$$

4. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

Наћи минималну вредност израза

$$-\frac{x_1^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

5. Дате су три тачке у равни. Наћи круг најмањег полупречника, који садржи ове тачке.
(Под кругом се подразумева кружница и њена унутрашњост)

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је у троуглу $\triangle ABC$ тачка H ортоцентар, M средина BC, D пресек AM са описаним кругом око $\triangle ABC$ и E симетрична тачка тачке D у односу на M. Доказати да је права EH нормална на праву AM.

2. Одредити последње 3 цифре броја 3^{2005}.

3. Наћи минимум функције

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}.$$

За које вредности x се достиже тај минимум?

4. У датом троуглу $\triangle ABC$ конструисати тачку M чији је збир квадрата растојања до правих AB, BC и CA минималан.

5. Да ли је могуће скуп природних бројева поделити на два дисјунктна скупа, тако да ни један од њих не садржи бесконачну аритметичку прогресију, код које нису сви елементи међусобно једнаки?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Први разред – Б категорија

1. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Нека су M, P, N и Q редом средишта страница BC, CD, EF и FA, а K и L редом средишта дужи MN и PQ. Доказати да се тачке K и L поклапају ако и само ако је $AB = DE$.

2. Тетиве AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече BC у тачки E. Доказати да је $\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABD$.

3. Нека су x и y цели бројеви, такви да 90 дели $x^2 + xy + y^2$. Доказати да онда 900 дели xy.

4. Одредити све природне бројеве a и b такве да број $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ буде рационалан.

5. Ана и Бранко су ставили неки број жетона на поља шаховске табле 8×8. Ана је записала бројеве жетона у свакој врсти, а Бранко бројеве жетона у свакој колони. Ана је записала све различите бројеве. Да ли је могуће да су сви Бранкови бројеви различити од Аниних?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Други разред – Б категорија

1. Тетиве AB и MN круга $k(O,r)$ секу се у унутрашњости круга у тачки C. Ако је $OC = \frac{3}{5}r$, тачка C средиште тетиве AB и $MC : CN = 4 : 9$, одредити синус угла $\sphericalangle ACM$.

2. Решити једначину

$$\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}.$$

3. У скупу комплексних бројева решити једначину

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0.$$

4. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $x^2 + y^2 \leqslant 25$.
Одредити најмању вредност израза

$$x^2 + y^2 + 12x - 16y.$$

5. Ана и Бранко су ставили неки број жетона на поља шаховске табле 8×8. Ана је записала бројеве жетона у свакој врсти, а Бранко бројеве жетона у свакој колони. Ана је записала све различите бројеве. Да ли је могуће да су сви Бранкови бројеви различити од Аниних?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да ни за која три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не могу истовремено да важе следеће три неједнакости:

$$\sqrt{3}\cdot|\vec{a}| < |\vec{b}-\vec{c}|, \qquad \sqrt{3}\cdot|\vec{b}| < |\vec{c}-\vec{a}|, \qquad \sqrt{3}\cdot|\vec{c}| < |\vec{a}-\vec{b}|.$$

2. У зависности од реалних параметара α и β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \beta z & = & \alpha+2\beta \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha^2+\beta+1 \\ x & + & 3y & + & 2\beta z & = & \alpha+3\beta \end{array} \quad .$$

3. Нека су a, b, c странице произвољног троугла и α, β углови наспрам страница a и b. Доказати да важи

$$a\cos\alpha + b\cos\beta \leqslant c.$$

4. Који је од бројева

$$2^{\sqrt{\log_2 2004}} \quad \text{и} \quad 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$$

већи? (Образложити одговор!)

5. Раван ромба $ABCD$ и раван правоуглог трапеза $DCEF$ су међусобно нормалне ($DC \perp DF$, $DC \parallel EF$, $DC > EF$) и важи $\cos\sphericalangle BCE = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DF}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Наћи однос странице ромба и полупречника уписаног круга ромба.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве, n такве да је број $2^n + n^2$ дељив са 7.

2. У полулопту полупречника R уписана је правилна четворострана призма максималне запремине, тако да доња основа призме припада основи полулопте, а темена горње основе призме припадају површи полулопте. Одредити висину те призме.

3. Наћи минимум функције

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}.$$

За које вредности x се достиже тај минимум?

4. Испитати монотоност низа $\{a_n\}$, који је дат са

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}.$$

5. Међу комплексним бројевима z који задовољавају једнакост

$$\frac{z-i}{z-2i} = \frac{1}{2}$$

одредити онај који има највећи модуо.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.