

Juniorska Balkanska Matematička Olimpijada 2006

Probno takmičenje, Aleksandar Ilić

Zadatak 1. Neka su $a, b, c > 0$ i $a + b + c \leq 3abc$. Dokazati nejednakost:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a + b + c.$$

Zadatak 2. Dato je $2n$ karata, obeleženih brojevima od 1 do $2n$. Igrači A i B igraju sledeću igru: karte se promešaju i svako dobije po n karata. Naizmenično izbacuju po jednu kartu na sto. Igra se završava ako je suma brojeva na izbačenim kartama deljiva sa $2n + 1$. Poslednja osoba koja je izbacila kartu je pobednik. Ako A i B igraju optimalnom strategijom, koji igrač pobeđuje?

Zadatak 3. Neka su E i F tačke na stranicama AC i AB trougla $\triangle ABC$, takve da je $EF \parallel BC$. Dokazati da presečne tačke krugova nad prečnicima BE i CF pripadaju visini iz temena A .

Zadatak 4. Neka je S_n suma prvih n prostih brojeva, $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 3$, $S_3 = 2 + 3 + 5, \dots$ Dokazati da za svako n , postoji prirodan broj k , tako da je

$$S_n < k^2 < S_{n+1}.$$

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 10 poena
Želimo Vam uspešan rad