

# Juniorska Balkanska Matematička Olimpijada

## Probno takmičenje

**Zadatak 1.** Neka su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi i neka je  $d$  najveći zajednički delilac za  $a$  i  $b$ . Ako je

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N},$$

dokazati da je  $d^2 \leq a + b$ .

**Zadatak 2.** Neka je  $ABCDEF$  pravilan šestougao sa centrom  $O$ . Tačke  $M$  i  $N$  su središta  $CD$  i  $DE$ , a  $L$  je presek pravih  $AM$  i  $BN$ . Dokazati da je površina trougla  $ALB$  jednaka površini četvorougla  $DMLN$  i  $\angle OLD = 90^\circ$  i  $\angle ALO = \angle OLN = 60^\circ$ .

**Zadatak 3.** Na kružnoj stazi dato je  $n$  kanti benzina razne zapremine. Poznato je da ukupna količina benzina u kantama tačno dovoljna da se obidje ceo krug. Dokazati da postoji mesto na stazi sa koga može da se krene i obidje ceo krug, sakupljajući benzin iz kanti na koje se naidje.

**Zadatak 4.** Realni brojevi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zadovoljavaju uslove:

$$x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \geq -1, \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$$

Dokazati da tada važi:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}.$$

Vreme za rad 240 minuta  
Svaki zadatak vredi 10 poena