Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Први разред – А категорија

1. Нека је операција „$\diamond$“ на скупу $G = \{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ задата доњом таблицом.

$\diamond$	1	2	3	4	$\cdots$	2016
1	5	5	5	5	$\cdots$	5
2	1	2	5	5	$\cdots$	5
3	4	3	5	5	$\cdots$	5
4	5	5	5	5	$\cdots$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2016	5	5	5	5	$\cdots$	5

(Унутар таблице на свим местима која нису експлицитно наведена налази се број 5.) Испитати да ли је операција „$\diamond$“ асоцијативна.

2. Дат је оштроугли $\triangle ABC$ у ком важи $AB < AC$. Тачка D је средиште странице BC, а p је права симетрична правој AD у односу на симетралу $\measuredangle BAC$. Ако је P подножје нормале из темена C на праву p, доказати једнакост $\measuredangle APD = \measuredangle BAC$.

3. Свака тачка тродимензионалног простора је обојена једном од две боје: црвеном или плавом. Притом, ако су три тачке A, B и C обојене истом бојом и важи $AB = AC$, онда је и средиште дужи BC обојено истом том бојом. Доказати да постоји квадар чија су сва темена обојена истом бојом.

4. Производ биномног коефицијента $\binom{64}{21}$ и непознатог непарног броја износи

$$5{*}\,6{*}0\,{*}8{*}\,862\,{*}1{*}\,7{*}7\,{*}4{*}\,4{*}5\,12{*}\,9{*}{*}.$$

Одредити цифре означене звездицом.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Други разред – А категорија

1. Одредити број пресликавања $f : \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају:

- $f(x,x) = x$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$ и
- $f(x, f(x,y)) = f(x,y)$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = x^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Наћи сва решења (p, a, b, m) једначине

$$p^2 + 4^a 9^b = m^2,$$

где је p прост број и $a, b, m \in \mathbb{N}_0$.

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је D средиште дужи BC. Нека је k кружница описана око $\triangle ABD$. На луку $\widehat{AB}$ ком не припада тачка D уочимо тачку E такву да важи $\measuredangle EDB = \measuredangle DAC$. Нека нормала из A на AD сече праву BC у тачки F. Нека је G друга пресечна тачка праве FE са k; изузетно, ако је FE тангента на k, тада дефинишимо $G \equiv E$. Доказати: $DG = DB$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки D. Нека је M средиште дужи BD. Уочимо кружницу k која пролази кроз тачку A, додирује страницу BC у тачки D, и сече дужи AM и AC у тачкама P и Q, редом ($P, Q \not\equiv A$). Доказати да су тачке B, P и Q колинеарне.

2. Да ли постоји природан број n такав да су $n - 2015$ и $\dfrac{n}{2015}$ природни бројеви који имају тачно 2015 делилаца?

3. У току је велики скуп n мудраца који седе за округлим столом. Сваки мудрац или увек лаже или увек говори истину. Места на којима мудраци седе су нумерисана од 1 до n почевши од неког места и идући редом у смеру казаљке на сату гледано одозго. Новинар, желећи да утврди који су мудраци лажљивци, ишао је редом око стола и интервјуисао мудраце, и за свако k, $k = 1, 2, \dots, n$, мудрац на k-том месту му је рекао да су следећих k мудраца од њега у смеру казаљке на сату гледано одозго сви лажљивци.

a) За које вредности n је могуће да мудраци дају овај скуп изјава?

b) За које вредности n (међу оним вредностима за које је овакав скуп изјава могућ) новинар и даље неће бити у стању да утврди за сваког мудраца да ли је лажљивац или истинољубац?

c) За $n = 2016$ одредити на којим местима седе мудраци истинољупци.

4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која није константна таква да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказати: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са A', B' и C', редом, подножја висина из темена A, B и C у $\triangle ABC$. Нека су I_A, I_B и I_C центри уписаних кружница у $\triangle AB'C'$, $\triangle BA'C'$ и $\triangle CA'B'$, редом. Доказати да је ортоцентар $\triangle I_AI_BI_C$ уједно и центар уписане кружнице у $\triangle ABC$.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви. Познато је да за свако i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, постоји природан број k такав да важи $x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k-1} \geqslant 0$ (где индексе посматрамо циклично по модулу n). Доказати: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant 0$.

3. Дат је природан број n. Доказати да за сваки непаран број x постоји природан број y такав да важи $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.

4. Кажемо да се многоугао $\mathscr{M}_0$ у равни може *обмотати са n копија* ако постоје многоуглови $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ подударни с многоуглом $\mathscr{M}_0$ такви да важи:

1° свака два многоугла $\mathscr{M}_i$ и $\mathscr{M}_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, имају дисјунктне унутрашњости;

2° сваки од многоуглова $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ има бар једну заједничку рубну тачку с многоуглом $\mathscr{M}_0$;

3° $\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{M}_i$ је многоугао такав да је строго у његовој унутрашњости садржан многоугао $\mathscr{M}_0$.

Да ли постоји многоугао којим се не може поплочати раван, а који се може обмотати са 8 копија?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Први разред – Б категорија

1. a) Полином x^8+x^4+1 представити као производ три полинома степена бар 1.

b) Рационалисати именилац разломка $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}$.

2. Посматрајмо број

$$122333\ldots\underbrace{99\ldots9}_{9\text{ пута}}\underbrace{1010\ldots10}_{10\text{ пута}}\ldots\underbrace{2020\ldots20}_{20\text{ пута}}$$

(дакле, посматрани број добијен је надовезивањем броја 1 записаног једном, броја 2 записаног два пута, броја 3 записаног три пута итд. до броја 20 записаног двадесет пута). Испитати да ли је посматрани број:

a) дељив са 9;

b) дељив са 11;

c) потпун квадрат;

d) дељив са 16.

3. Да ли постоји пермутација $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ бројева $1, 2, 3, 4, 5$ таква да важи

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_1) = (a_1+a_3)(a_3+a_5)(a_5+a_2)(a_2+a_4)(a_4+a_1)?$$

4. У једнакокраком $\triangle ABC$, $AB = BC$, тачка M је подножје висине из темена B, а симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки K. Ако важи $2BM = AK$, одредити углове тог троугла.

5. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Конструисати праву која пролази кроз теме A и дели тај четвороугао на два дела једнаких површина.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Други разред – Б категорија

1. Решити неједначину
$$\log_{2-\frac{1}{5}x}(x^2-4x+4)<2.$$

2. Решити систем једначина
$$3x^2+2xy+6y^2=24;$$
$$x^4+4y^4=64.$$

3. Одредити све природне бројеве n за које је
$$1+2\cdot 3^n+10^n+19^n$$
потпун квадрат природног броја.

4. Посматрајмо систем једначина
$$y_1+y_2+\cdots+y_{1000}=2016;$$
$$y_n=x_n^{2^{2^n}} \text{ за } n=1,2,3,\ldots,1000.$$
(Дакле, систем има 1001 једначину и укупно 2000 непознатих.) Колико решења $(x_1,x_2,\ldots,x_{1000},y_1,y_2,\ldots,y_{1000})$ има посматрани систем у скупу ненегативних целих бројева?

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Конструисати нормалу на страницу AB која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – Б категорија

1. Дати су вектори $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 3)$. Одредити, ако постоји, реалан број r такав да вектор $(1, r, -2)$ гради угао од 60° са вектором $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})$.

2. Дата је трака 2015×1 подељена на јединичне квадратиће. Два играча наизменично уписују X у произвољан квадратић, под условом да он није већ попуњен. Добија први играч који постигне да након његовог потеза постоје бар 3 узастопна квадратића обележена словом X. Доказати да први играч има победничку стратегију.

3. Природни бројеви a, b и c су такви да је број $a + b + c$ прост и важи

$$ab + bc + ac \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказати: $a = b = c = 1$.

4. У правоуглом троуглу тежишне линије које одговарају катетама заклапају угао φ за који важи $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{3}{4}$. Наћи углове тог троугла.

5. За позитивне реалне бројеве a и b означимо

$$S(a, b) = \min\left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Наћи највећу могућу вредност израза $S(a, b)$ и за које a и b се та вредност достиже.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је полином
$$P(x) = 3x^5 + ax^4 - 35x^3 + bx^2 + 32x + c$$
чије су две нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, и важи $x_3x_4x_5 = 2$. Наћи коефицијенте a, b и c и преостале нуле.

2. Теткица с Окружног такмичења поново пише по табли, овај пут по следећем обрасцу. На почетку је на табли написана променљива x. У једном кораку теткица бира произвољна два израза која постоје на табли (укључујући могућност да узме исти израз два пута) и на таблу дописује њихов производ. Колико најмање корака је потребно да би се на табли добио израз x^{1025}?

3. Природан број n има следећу особину: за свако k из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$ (где је m унапред фиксиран природан број) број kn је потпун k-ти степен (другим речима, $2n$ је потпун квадрат, $3n$ је потпун куб, ..., mn је потпун m-ти степен). Одредити највећи природан број m за који постоји такав природан број n.

4. За које вредности реалних параметара a и b систем
$$\begin{aligned} xyz + z &= a; \\ xyz^2 + z &= b; \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$
има јединствено решење у скупу реалних бројева?

5. Тетраедар $ABCD$ има дужине ивица $AB = 1$ и $BD = 2$, а $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle ABC$ су прави. Сфера додирује пљосни ABD и BCD у тачкама A и C, редом. Наћи полупречник те сфере.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.