Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Први разред – А категорија

1. Нека је $k > 0$. На страницама A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 троугла $A_1B_1C_1$ уочене су тачке C_2, A_2 и B_2, редом, такве да је

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = k.$$

Даље, за свако $2 \leqslant i \leqslant 2012$, на страницама A_iB_i, B_iC_i и C_iA_i троугла $A_iB_iC_i$ уочене су тачке C_{i+1}, A_{i+1} и B_{i+1}, редом, такве да је

$$\frac{A_iC_{i+1}}{C_{i+1}B_i} = \frac{B_iA_{i+1}}{A_{i+1}C_i} = \frac{C_iB_{i+1}}{B_{i+1}A_i} = \begin{cases} k, & i \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{k}, & i \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}.$$

Доказати да се праве A_1A_{2013}, B_1B_{2013} и C_1C_{2013} секу у једној тачки.

2. Нека је p прост број. Ако постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да је

$$k^3 + pk^2$$

потпун куб, доказати да $3 \mid p - 1$.

3. Нека су a, b, c и d реални бројеви за које важи $abcd = 1$ и

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Доказати да су нека два од бројева ab, ac, ad, bc, bd, cd једнака.

4. На 41 поље шаховске табле стављен је по један краљ. Доказати да се међу њима могу наћи три дисјунктна скупа таква да сваки садржи бар 5 краљева који се међусобно не нападају.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Други разред – А категорија

1. Нека је F фигура која одговара скупу тачака са координатама (b, c) (у правоуглом координатном систему) при чему су b и c такви реални бројеви да су модули оба решења квадратне једначине $x^2 + bx + c = 0$ не већи од 1. Одредити површину фигуре F.

2. У простору је дат бесконачан скуп S тачака међу којима не постоје три колинеарне. Сваке две тачке скупа S спојене су дужима, а свака дуж означена је са $+$ или $-$. При томе, скуп S има следећу особину: за свака два коначна дисјунктна подскупа $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$ скупа S постоји тачка из S која је повезана дужима означеним са $+$ са свим тачкама $A_1, \ldots, A_m$, а дужима означеним са $-$ са свим тачкама $B_1, \ldots, B_n$.
Ако се обрише коначно много тачака скупа S, доказати да преостале и даље имају описану особину.

3. На столу се налази 2014 картица на којима редом пишу бројеви

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2013}.$$

Аца и Бранко наизменично узимају по једну картицу са стола, а први картицу узима Аца. Након што је узета и последња картица, Аца израчуна збир бројева који се налазе на картицама које је он изабрао, а Бранко уради исто са својим картицама. Обележимо са A и B збирове који су добили Аца и Бранко, редом. Уколико је НЗД$(A, B) > 1$ победио је Аца, а у супротном је победио Бранко. Одредити који играч има победничку стратегију.

4. Нека су AD и BE висине, H ортоцентар и O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Ако је K ортоцентар троугла AOB, доказати да права HK полови дуж DE.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Трећи разред – А категорија

1. За скуп природних бројева A кажемо да је *скуп-интервал* ако постоје природни бројеви $a \leqslant b$ такви да је $A = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leqslant i \leqslant b\}$. За дате природне бројеве n и k, колико има уређених k-торки скуп-интервала $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таквих да је

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}?$$

2. Одредити највеће $c \in \mathbb{R}$ (или доказати да не постоји) за које је тачно следеће тврђење:
Ако је α нула полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ такви да је $|a_0| = |a_1| = \ldots = |a_n| > 0$, тада је $|\alpha| > c$.

3. За природан број кажемо да је *палиндром* ако се приликом читања његових цифара (у декадном запису) слева надесно и здесна налево добија исти број. Одредити све природне бројеве n за које је број n^k палиндром за сваки природан број k.

4. У оштроуглом троуглу ABC повучене су висине AA_1, BB_1 и CC_1. Тачке M и N на дужима A_1C_1 и C_1B_1 су такве да је

$$\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle NAC.$$

Доказати да је MA симетрала угла C_1MN.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = a + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

2. Природан број m називамо *скоро бинарни* ако се може представити као збир различитих бројева из скупа

$$\{2^k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Од свих скоро бинарних бројева нека је N онај који је 2014^{2012}-ти по величини, почев од најмањег. Да ли је број $N - 2013$ скоро бинарни?

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC $(AB \neq AC)$, а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C. Права ℓ, која садржи H и паралелна је са B_1C_1, сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L $(L \neq H)$. Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D. Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E $(E \neq A)$, и ако је M средиште дужи BC, доказати да тачке D, E, K, L, M леже на истој кружници.

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоји функција $f : \{0,1\}^n \to \{1,2,\ldots,n\}$ која задовољава:
Ако су $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ два низа из скупа $\{0,1\}^n$ таква да је $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| = 2$, онда важи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Први разред – Б категорија

1. У зависности од реалног параметра a, у скупу реалних бројева решити једначину

$$|x-1|+|x+2|=a-2x.$$

2. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Доказати да је $BC > B_1C_1$.

3. Доказати да међу 6 узастопних природних бројева постоји бар један који је узајамно прост са сваким од осталих 5.

4. Кружнице k_1, са центром O_1 и полупречником r, и k_2, са центром O_2 и полупречником $2r$, додирују се изнутра. Тетива AB кружнице k_2 додирује кружницу k_1 у тачки T. Нека је права p нормала из O_2 на AB, и нека је њен други пресек с кружницом k_1 тачка C. Нека је D она тачка пресека p и k_2 која је са супротне стране од O_2 у односу на AB. Доказати да је права AB симетрала дужи CD.

5. Дато је 6 тачака у равни. Нека је p број различитих правих које одређују парови ових тачака. Које све вредности може имати p?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8.$$

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{3^x+4^x-5^x}{x^3+x^4-x^5}\geqslant 0.$$

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$2!!\cdot 4!!\cdot 6!!\cdot \ldots \cdot (2k)!!=(k(k+1))!!.$$

(Са $(2k)!!$ означен је производ парних природних бројева не већих од $2k$. Нпр. $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$.)

4. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $CD=AD+BC$. Доказати да пресечна тачка симетрала углова у теменима A и B припада страници CD.

5. Нека је n природан број, а k цео број, тако да је $0\leqslant k\leqslant n$. Доказати да у скупу $\{0,1,2,\ldots,n\}$ једначине

$$x+y=n-k \quad \text{и} \quad x+y=n+k$$

имају исти број решења.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Трећи разред – Б категорија

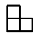
1. Основица AB једнакокраког троугла површине 15 припада правој $x - 2y + 20 = 0$, а врх му је тачка $C(1, 8)$. Одредити једначине правих којима припадају краци тог троугла.

2. Доказати неједнакост

$$\sin 26^\circ \cdot \sin 58^\circ \cdot \sin 74^\circ \cdot \sin 82^\circ \cdot \sin 86^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \sin 89^\circ > \frac{45\sqrt{2}}{64\pi}.$$

3. Одредити цифру десетица броја $16^{3^{2013}}$.

4. Која је најмања површина правоугаоног листа папира, који се може савити тако да се прекрије целокупна површина тетраедра код кога су све ивице дужине 1?

5. Два играча, Аца и Бранко, играју следећу игру:
- Прво Аца бира природан број $m \geqslant 2$ који није дељив са 3;
- Затим Бранко бира природан број n;
- Онда Аца на табли димензија $m \times n$ исеца једно поље;
- Затим Бранко ставља на ту таблу тримино фигуре  (фигуре се могу окретати) које се не могу преклапати.

Игру добија Бранко ако може покрити целу таблу тримино фигурама, а у противном добија Аца. Ко од њих има добитну стратегију?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Четврти разред – Б категорија

1. Дати су комплексни бројеви

$a = (i+1)\cdot(i+2)\cdot\ldots\cdot(i+2013)$ и $b = (i-1)\cdot(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-2013)$.

Упоредити модуле ових бројева.

2. Одредити остатак при дељењу полинома

$$x^{2013} + x^{2010} + \ldots + x^6 + x^3 + 8$$

полиномом $x^2 - x + 1$.

3. Одредити све четвороцифрене бројеве $n = \overline{abcd}$ такве да је $\dfrac{2n}{3}$ четвороцифрен број чије су цифре хиљада, стотина, десетица и јединица редом $b+1$, $a+1$, $d+1$ и $c+1$.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC ($AB \neq AC$), а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C. Права ℓ, која садржи H и паралелна је са B_1C_1, сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L ($L \neq H$). Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D. Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E ($E \neq A$), доказати да тачке D, E, K, L леже на истој кружници.

5. За дате природне бројеве n и k, колико има уређених k-торки скупова $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таквих да је

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}?$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.