ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је $D \in BC$ подножје висине из темена A оштроуглог троугла ABC. На дужи AD уочена је тачка P таква да је $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA$. Доказати да је троугао ABC једнакокрак или је тачка P ортоцентар троугла ABC.

2. Познато је да за неке природне бројеве x и y важи

$$23^x \cdot 111^y = \overline{aab3dc6902b2c74d456b},$$

где су $a \neq 0, b, c, d$ неке (не обавезно различите) цифре. Наћи $a+b+c+d$.

3. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за сваки природан број n број $P(P(n))$ при дељењу са n даје остатак $n-1$. Доказати да полином $P(x)$ нема целобројну нулу.

4. Главни град неке државе спојен је са преосталих 2012 градова авиолинијама. Сваки од преосталих градова спојен је авиолинијом бар са још једним градом осим главног. Доказати да је могуће укинути 1006 авиолинија из главног града тако да је и даље могуће стићи из сваког града до сваког другог коришћењем неких авиолинија.
(Све авиолиније су двосмерне.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Други разред, А категорија

1. На табли је записана једначина

$$\sqrt{*x^2 + *x + *} = *x + *.$$

Два играча, Мирко и Славко, наизменично уместо једне од преосталих звездица уписују цео број. Мирко игра први. Он добија игру уколико добијена једначина има бар једно решење у скупу рационалних бројева, док у супротном игру добија Славко. Који од играча има победничку стратегију?

2. Нека су D, E, F подножја висина из темена A, B, C, редом, оштроуглог троугла ABC који није једнакокрак. Права EF сече праву BC у тачки P, док права кроз D паралелна са EF сече странице AB и AC у тачкама Q и R, редом. Доказати да једна пресечна тачка описаних кружница троуглова DEF и PQR лежи на страници BC.

3. Наћи сва решења (p, q, a, m) једначине

$$p^2 + 4^a q^2 = m^2,$$

таква да су p и q прости бројеви и $a, m \in \mathbb{N}$.

4. Перица је на папиру нацртао $n \geqslant 2$ тачака које припадају истој кружници и дуж између сваке две тачке. Притом, сваку од тих дужи означио је или са $+$ или са $-$. Доказати да, без обзира на начин на који су дужи означене, Марица може избрисати све дужи означене једним знаком и неке дужи означене другим знаком, тако да важе следећа два услова:

1) неизбрисане дужи немају заједничких тачака у унутрашњости кружнице и

2) сваке две тачке повезане су изломљеном линијом састављеном од једне или више неизбрисаних дужи.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је број $\operatorname{tg}\left(17^{3^{2012}}\right)^\circ$ ирационалан.

2. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је за сваки прост број p број $a \cdot p^n + b$ сложен.

3. Нека су M и N тачке на страници BC троугла ABC такве да важи распоред $B - M - N$ и да је $BM = CN$. Тачке P и Q изабране су на дужима AN и AM, редом, тако да је $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ и $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Доказати да је

$$\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB.$$

4. За коначан непразан скуп S природних бројева дефинишемо

$$r(S) = \max(S) - \min(S)$$

(разлика највећег и најмањег елемента скупа S). Ако је A скуп од 30 различитих природних бројева, колико највише различитих вредности може имати $r(S)$ за све могуће петочлане подскупове S скупа A (тј. колико највише елемената може имати скуп $\{r(S) \mid S \subseteq A \wedge |S| = 5\}$)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да се прост број p може приказати у облику

$$p = \frac{n^4 - m^4}{n^3 + m^3},$$

за неке $n, m \in \mathbb{N}$, ако и само ако је p једнак збиру квадрата нека два узастопна природна броја.

2. Ако су $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n = 0$ реални бројеви, одредити највећу могућу вредност суме

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_i - x_{i+1}).$$

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. На свакој од $2n$ карата записан је један од бројева 1 до $2n$ (сваки број на тачно једној карти). Карте су постављене на сто у једном реду, али у непознатом редоследу и окренуте лицем надоле. Милош и Аца играју следећу игру против њиховог другара Ђолета. Прво Милош и Ђоле приђу столу и окрену све карте. Пошто погледа распоред карата Милош може заменити места тачно две карте на столу (или их оставити у датом редоследу). Затим се све карте поново окрену лицем надоле, а столу прилази Аца. Ђоле каже било који број од 1 до $2n$, а Аца окреће карте како би пронашао карту са тим бројем. Милош и Аца побеђују ако Аца нађе тражену карту у највише n покушаја, а иначе побеђује Ђоле. Ко има победничку стратегију?
(Милош и Аца се могу договарати само пре почетка игре.)

4. Доказати да површина четвороугла са страницама a, b, c, d, тим редом, није већа од

$$\frac{1}{4} \cdot \left((a+c)^2 + bd\right).$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред, Б категорија

1. Нека је M произвољна тачка у равни датог троугла ABC. Доказати да вектор $2 \cdot \overrightarrow{MA} - 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ не зависи од избора тачке M.

2. Четири ученика: Аца, Бора, Васа и Горан такмичили су се у трчању. После трке (на којој није било деобе места), на питање које је ко место заузео, одговорили су следеће:

- Аца: „Ја нисам био ни први ни последњи."
- Бора: „Ја нисам био последњи."
- Васа: „Ја сам био први."
- Горан: „Ја сам био последњи."

а) Да ли могуће да су сви одговори истинити?
б) Познато је да су 3 од ових одговора били истинити, а 1 неистинит. Ко је говорио неистину? За кога од њих са сигурношћу можете тврдити какав му је био поредак на циљу?

3. Доказати да за реалне бројеве $x \neq y \neq z \neq x$ важи

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \neq 0.$$

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q. Права l која сече дуж PQ сече дате кружнице у тачкама A, B, C, D, при чему важи распоред $A - B - C - D$. Доказати да је

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD.$$

5. Шест мудраца је говорило о броју $n \in \mathbb{N}$ записаном у декадном запису.
Први: „Број n умањен за 1 је прост број акко n има бар један прост делилац из 1. десетице."
Други: „Број n је дељив са 2 акко n није палиндром који има број цифара дељив са 2."
Трећи: „Број n није дељив са 3 акко има мање од 3 непарна делиоца."
Четврти: „Број n је дељив са 4 акко има тачно 4 цифре."
Пети: „Број n није дељив са 5 акко је збир цифара броја n једнак 5."
Шести: „Број n није узајамно прост са 6 акко има тачно 6 делилаца."
Одредите све могуће природне бројеве n, ако се зна да је изјава сваког мудраца тачна.
(Број n је палиндром уколико је једнак броју који се добија читањем броја n са лева на десно. Нпр. број 1245421 је палиндром.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Други разред, Б категорија

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, такви да једначина $ax^4 + bx^2 + c = 0$ нема решења у скупу реалних бројева. Да ли једначина $ax^6 + bx^3 + c = 0$ може имати бар једно реално решење?

2. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \geqslant \log_{x^3+1} x^3 \geqslant \ldots \geqslant \log_{x^n+1} x^n \geqslant \ldots$$

3. Нека су $x > y$ природни бројеви за које 2012 дели број

$$\frac{x!}{y! \cdot (x-y)!}.$$

Колико најмање може бити $x + y$?
(За $n \in \mathbb{N}$ са $n!$ означен је производ првих n природних бројева.)

4. Нека је E тачка на страници AC троугла ABC, а l права различита од AB и BC која садржи теме B. Права која садржи E и паралелна је са BC сече праву l у тачки N, а права која садржи E и паралелна је са AB сече праву l у тачки M. Доказати да је $AN \parallel CM$.

5. Дата је таблица 2010×2012, где свако поље садржи по једну сијалицу. На почетку је број упаљених сијалица у таблици већи од $2009 \cdot 2011$. Ако се у неком делу таблице димензија 2×2 налазе три угашене сијалице тада се и четврта сијалица тог дела аутоматски гаси, а у супротном се стање сијалица не мења (угашене сијалице остају угашене, а упаљене остају упаљене). Доказати да се не могу угасити све сијалице у таблици.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Трећи разред , Б категорија

1. Тачке комплексне равни које одговарају комплексним бројеви

$$2a + b,\ 2b + c,\ 2c + a$$

чине темена једнакостраничног троугла. Да ли тачке комплексне равни које одговарају комплексним бројеви a, b, c морају бити темена једнакостраничног троугла?

2. Нека је x реалан број већи од 1. Шта је веће $4^x + 1$ или $2^x + 3^x$?

3. Нека је $f(x) = x^4 - 5x^2 + 67$, за $x \in \mathbb{N}$. Одредити све просте бројеве p за које је збир цифара броја $f(p)$ најмањи могући.

4. У троуглу ABC дата је тачка O тако да важи

$$OA \cdot BC = OB \cdot CA = OC \cdot AB.$$

Доказати да су подножја нормала конструисаних из тачке O на странице троугла темена једнакостраничног троугла.

5. а) Израчунати збир свих троцифрених бројева чије су све цифре непарне.
б) Одредити последњу цифру збира свих троцифрених бројева који у декадном запису не садрже цифру 3.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима. Наћи збир квадрата његових нула уколико је познато да важи

$$P(x)^3 = x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + 15x + 1$$

за неке $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \in \mathbb{R}$, и да је збир коефицијената полинома $P(x)^3$ једнак 216.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$\operatorname{arctg}\frac{n}{11} + n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

3. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n чије су све цифре различите и дељив је са 2012.

4. Дат је $\sphericalangle xAy$ и тачка $B, B \neq A$, на симетрали овог угла. Кружница k која садржи тачке A и B сече крак Ax у тачки C, $C \neq A$, а крак Ay у тачки D, $D \neq A$. Доказати да $AC + AD$ не зависи од избора кружнице k.

5. На колико начина можемо 3 Италијана, 4 Француза и 4 Немца да сместимо у низ ако сви Италијани морају да стоје један до другог, а никоја два Немца не смеју да стоје један до другог?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.