

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

8. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2014.

Први дан

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

2. На страницама BC и AC троугла ABC дате су тачке D и E , редом. Нека је F ($F \neq C$) тачка пресека кружнице описане око троугла CED и праве која садржи тачку C и паралелна је са правом AB . Нека је G тачка пресека праве FD и странице AB , а H тачка на правој AB таква да је $\sphericalangle HDA = \sphericalangle GEB$ и $H - A - B$. Ако је $DG = EH$, доказати да тачка пресека дужи AD и BE припада симетрали угла ACB .
3. Два играча играју следећу игру. Играчи наизменично записују по један природан број већи од један, при чему није дозвољено записати линеарну комбинацију претходно записаних бројева са ненегативним целим коефицијентима. Игру губи играч који не може да запише нови број. Да ли неко од играча има победничку стратегију и, ако има, који?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

8. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2014.

Други дан

4. За природан број n кажемо да је *шашав* ако и само ако постоје природни бројеви $a > 1$ и $b > 1$ такви да је $n = a^b + b$. Да ли постоји 2014 узастопних природних бројева међу којима је тачно 2012 шашавих бројева?
5. Правилан n -тоугао подељен је на троуглове помоћу $n - 3$ дијагонале од којих никоје две немају заједничких унутрашњих тачака. Колико највише међу овим троугловима може бити међусобно неподударних?
6. Симетрале унутрашњих углова код темена A и B троугла ABC секу наспрамне странице у тачкама D и E , редом. Ромб је уписан у четвороугао $ABDE$ тако да се на свакој страници четвороугла налази тачно једно теме ромба. Ако је $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$, доказати да је барем један угао ромба не већи од $\max\{\alpha, \beta\}$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.