

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ  
Материјали за младе математичаре, свеска 22

---

Павле Младеновић

# КОМБИНАТОРИКА

Четврто издање

Б Е О Г Р А Д  
2013.

*др Павле Младеновић*, професор Математичког факултета у Београду

КОМБИНАТОРИКА

четврто издање

Материјали за младе математичаре, свеска 22

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, Кнеза Михаила 35/IV

<http://www.dms.org.rs>

За издавача: *др Александар Липковски*

Рецензенти: *др Зоран Каделбург*

*др Владимир Јанковић*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

AMS-класификација: 05–01

УДК: 519.1

© Друштво математичара Србије

Ранија издања: 1989, 1992, 2001.

ISBN 978–86–81453–88–9



Штампање ове књиге помогла је  
Нафтна индустрија Србије

CIP – Каталогизација у публикацији

Народна библиотека Србије, Београд

519.1(035.057.874)

МЛАДЕНОВИЋ, Павле, 1955–

Комбинаторика / Павле Младеновић, 4. изд. –  
Београд : Друштво математичара Србије, 2013.  
(Нови Сад : Стојков). – VI, 218 стр. : илустр. ;  
24 см. – (Материјали за младе математичаре /  
Друштво математичара Србије ; св. 22)

Тираж 1000. – Библиографија: стр. 215–216. –  
Регистар.

ISBN 978–86–81453–88–9

а) Комбинаторика – задаци

COBISS.SR-ID 196491020

Тираж: 1000 примерака

Штампа: „Стојков“, Нови Сад

# САДРЖАЈ

Предговор . . . . .	<i>v</i>
<b>Увод</b>	
1. Скупови, функције, релације – преглед основних појмова . . . . .	1
2. О предмету комбинаторике . . . . .	5
3. Задаци . . . . .	6
<b>Глава 1. Варијације, пермутације и комбинације</b>	
1. Варијација . . . . .	7
2. Варијација без понављања . . . . .	8
3. Пермутација . . . . .	8
4. Комбинација . . . . .	9
5. Варијација датог типа . . . . .	10
6. Комбинација са понављањем . . . . .	12
7. Примери . . . . .	14
8. Један геометријски метод пребројавања варијација . . . . .	19
9. Доказивање идентитета комбинаторним методом . . . . .	22
10. Задаци . . . . .	24
<b>Глава 2. Биномна и полиномна формула</b>	
1. Биномна формула . . . . .	31
2. Својства биномних коефицијената . . . . .	33
3. Полиномна формула . . . . .	37
4. Својства полиномних коефицијената . . . . .	38
5. Задаци . . . . .	39
<b>Глава 3. Метод укључивања и искључивања</b>	
1. Формула укључивања и искључивања . . . . .	43
2. Специјалан случај . . . . .	45
3. Примери . . . . .	46
4. Уопштена формула укључивања и искључивања . . . . .	51
5. Задаци . . . . .	51
<b>Глава 4. Проблеми разбијања</b>	
1. Разбијање броја . . . . .	55
2. Уређено разбијање броја . . . . .	58
3. Графичко представљање разбијања . . . . .	60
4. Разбијање скупа . . . . .	64
5. Задаци . . . . .	66

**Глава 5. Бернсајдова лема**

1. Уводне напомене . . . . .	69
2. О пермутацијама . . . . .	70
3. Група пермутација . . . . .	75
4. Бернсајдова лема . . . . .	77
5. Задаци . . . . .	79

**Глава 6. Генераторне функције**

1. Дефиниција и примери . . . . .	81
2. Операције са генераторним функцијама . . . . .	82
3. Примери примене генераторних функција . . . . .	83
4. Експоненцијалне генераторне функције . . . . .	86
5. Задаци . . . . .	87

**Глава 7. Теореме о егзистенцији комбинаторних конфигурација**

1. Магични квадрати . . . . .	88
2. Латински квадрати . . . . .	93
3. Математичке игре . . . . .	94
4. О графовима . . . . .	102
5. Систем различитих представника . . . . .	104
6. Дирихлеов принцип . . . . .	106
7. Рамзејева теорема . . . . .	108
8. Ероуова теорема . . . . .	111
9. Задаци . . . . .	114

**Глава 8. Збирка разних комбинаторних задатака**

1. Варијације, пермутације, комбинације . . . . .	121
2. Квадратне таблице . . . . .	123
3. Комбинаторика на шаховској табли . . . . .	124
4. Мерења . . . . .	126
5. Екстремални проблеми на коначним скуповима . . . . .	127
6. Задаци са математичких олимпијада . . . . .	129

**Резултати, упутства, решења задатака**

Глава 1 . . . . .	133
Глава 2 . . . . .	146
Глава 3 . . . . .	154
Глава 4 . . . . .	166
Глава 5 . . . . .	174
Глава 6 . . . . .	177
Глава 7 . . . . .	178
Глава 8 . . . . .	197
Литература . . . . .	215
Регистар појмова . . . . .	217

## ПРЕДГОВОР ТРЕЋЕМ ИЗДАЊУ

Треће издање књиге КОМБИНАТОРИКА настало је као резултат малих допуна и исправки уочених пропуста у другом издању. Дописана је нова глава која се односи на генераторне функције и додат је изванредан број нових задатака, који су већим делом садржани у последња два одељка главе 8 овог издања. Структура књиге остала је иста и изгледа овако:

У уводу је дат преглед основних појмова о скуповима и функцијама, као и основна правила комбинаторике. У првим двема главама обрађене су варијације, пермутације и комбинације и биномна формула, тј. појмови које стандардно садрже средњошколски програми. Сви уведени појмови илустровани су једноставним и бројним примерима.

Трећа глава је посвећена методу укључивања и искључивања, који се користи при решавању задатака пребројавања броја елемената уније неколико коначних скупова. Иако су формулација и доказ основне теореме релативно једноставни, применом овог метода се многи, наизглед тешки, проблеми пребројавања решавају брзо и ефектно. У четвртој глави разматрају се проблеми разбијања броја на делове и скупа на блокове. Дефинисане су одговарајуће класе специјалних бројева и доказана нека њихова својства.

У петој глави доказана је тзв. Бернсајдова лема. Помоћу ње се у многим ситуацијама одређује број класа еквиваленције које одређује нека релација еквиваленције задата на коначном скупу и она представља увод у општију Појину теорију. Такође су уведени неопходни појмови и доказан изванредан број тврђења из теорије група.

У шестој глави уведене су генераторне функције низова бројева, које представљају важан апарат у решавању задатака пребројавања коначних скупова. Ефикасност метода примене генераторних функција илустрована је на неколико примера, од којих су неки у овој књизи решавани и другим методима.

У седмој глави разматрају се проблеми егзистенције комбинаторних конфигурација. Поред параграфа који се односе на Холову теорему о егзистенцији система различитих представника, Дирихлеов принцип и Рамзејеву теорему (као суштинску генерализацију Дирихлеовог принципа), дати су и алгоритми конструкције магичних квадрата, решења неколико познатих математичких игара, као и примери који се решавају коришћењем графова. Сама прича о графовима дата је кроз примере и задатке. У овом издању додат је и одељак у коме је доказана Ероуова теорема која тврди да не постоји функција друштвеног избора, која је

дефинисана на основу система индивидуалних жеља на скупу од бар три опције и која задовољава дати систем аксиома.

У последњем параграфу сваке главе садржан је одређен број задатака (укупно око три стотине). Решења већине од тих задатака дата су на крају књиге, а за мањи број задатака дата су само резултати или упутство за решавање. Известан број задатака (њих око стотину), за чије решавање је неопходно комбиновање идеја из претходних глава, издвојен је у посебну главу 8. Последњи одељак те главе садржи 24 задатка, који су у последњих десет година решавани на Балканским и Међународним математичким олимпијадама.

Надам се да ће и ово издање књиге наћи своје читаоце међу младим математичарима који желе да продубе и прошире знање у оквиру и ван тема које су предвиђене стандардним школским програмима. Избор тема и задатака обрађених у књизи посебно је намењен ученицима који желе да се припреме за успешан наступ на такмичењима младих математичара. Многе теме које су обрађене у књизи аутор је више пута излагао на припремама наших најбољих младих математичара за учешће на међународним олимпијадама. Материјал обрађен у књизи предаван је и на специјалистичким студијама за професоре математике које је Математички факултет у Београду организовао у току школске 1999/2000. године. Надам се такође да ће књига бити корисна и професорима у организовању рада са талентованим ученицима у оквиру математичких секција. Књига може бити од користи и студентима Математичког и техничких факултета у савлађивању тема и садржаја из дискретне математике који су у њој обрађени.

Рецензенти књиге др Зоран Каделбург и др Владимир Јанковић су дали низ корисних сугестија у многим разговорима о проблематици која је обрађивана у овој књизи. Желим да им и овом приликом изразим своју захвалност.

Све примедбе и коментаре који се односе на ово издање књиге, посебно на избор тема и задатака обрађених у књизи, примићу са захвалношћу.

У Београду, децембра 2000.

Павле Младеновић

## ПРЕДГОВОР ЧЕТВРТОМ ИЗДАЊУ

Ово издање књиге се незнатно разликује од трећег издања. Отклоњене су уочене штампарске и друге грешке. Највећи број њих је врло пажљивим читањем уочио Иван Елчић и љубазно ме обавестио. Захваљујем му се на томе.

У Београду, јануара 2013.

Павле Младеновић