Kenguru Határok Nélkül Matematikaverseny 2016.
11. – 12. osztály

3 pontos feladatok

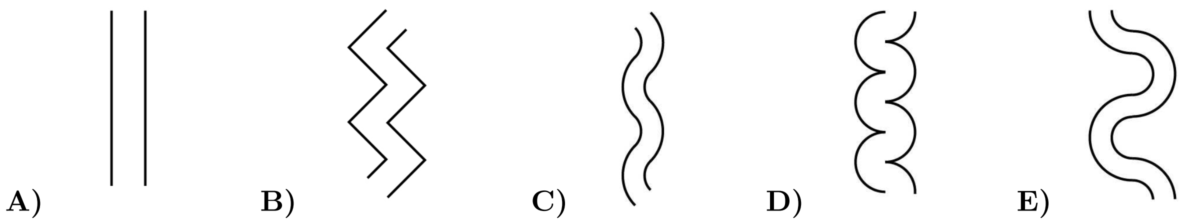
1. Marci és Jancsi éveinek száma összesen 23, Jancsi és Anti éveinek száma összesen 24, Marci és Anti éveinek száma pedig összesen 25. Hány éves közülük a legidősebb?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

2. Az $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ összeg egyenlő:

A) $\frac{3}{111}$ **B)** $\frac{111}{1110}$ **C)** $\frac{111}{1000}$ **D)** $\frac{3}{1000}$ **E)** $\frac{3}{1110}$

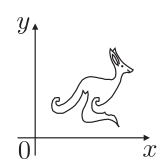
3. Vince hidat szeretne építeni a folyón át, és tudja, hogy az adott folyót átszelő legrövidebb hosszúságú híd a folyópart bármelyik pontjáról építve ugyanolyan hosszú lenne. Melyik folyóra nem igaz a fenti tulajdonság?

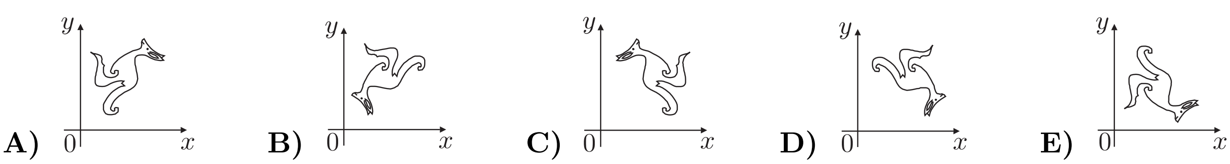


4. Hány olyan egész szám van, amely nagyobb $2015 \cdot 2017$-nél és kisebb $2016 \cdot 2016$-nál?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

5. Az xOy sík pontjainak egy halmaza kengurut alkot (nézd a jobb oldali ábrát). Hogy néz ki az xOy síkban az a megfelelő ponthalmaz, amelyet úgy kapunk, hogy minden pont x és y koordinátája helyet cserél?

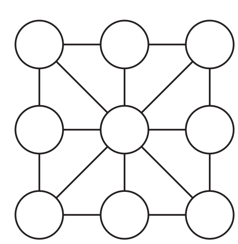




6. Legkevesebb hány síkra van szükség a háromdimenziós tér egy tetszőleges véges részének behatárolásához?

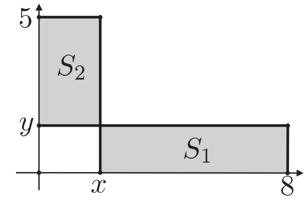
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

7. Marika kilenc egész számot szeretne beírni az ábrán látható körökbe úgy, hogy a nyolc kis háromszögre, amelyeket a szakaszokkal összekötött körök alkotnak, teljesüljön, hogy mindegyik háromszög csúcsainál levő körökbe beírt számok összege egyenlő. Legtöbb hány különböző számot tud Marika felhasználni ehhez a kitöltéshez?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 8

8. Az ábrán látható S_1 és S_2 téglalapok területe egyenlő. Az $\frac{x}{y}$ arány a következő számmal egyenlő:

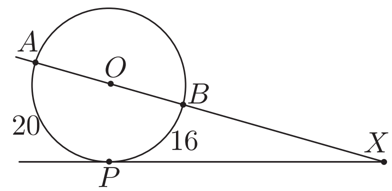


A) 1 **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{7}{4}$ **E)** $\frac{8}{5}$

9. Ha $x^2 - 4x + 2 = 0$, akkor $x + \frac{2}{x}$ értéke:

A) -4 **B)** -2 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 4

10. Az ábrán látható O középpontú kör AP és BP íveinek hossza, rendre, 20 és 16. Mekkora az $AXP\sphericalangle$ mértéke?



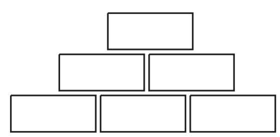
A) $30°$ **B)** $24°$ **C)** $18°$ **D)** $15°$ **E)** $10°$

4 pontos feladatok

11. Az a, b, c és d természetes számokra teljesül, hogy $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Az a, b, c és d számok közül melyik a legnagyobb?

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** nem lehet egyértelműen meghatározni

12. Az ábrán látható piramis minden mezőjében olyan szám van, amely a közvetlenül alatta levő két mezőhöz tartozó számok szorzata. A következő számok közül melyik nem lehet a piramis csúcsán található mezőben, ha tudjuk, hogy a piramis legalsó sorában látható három mezőben 1-nél nagyobb természetes számok vannak?



A) 56 **B)** 84 **C)** 90 **D)** 105 **E)** 220

13. Mennyi x_4 értéke, ha $x_1 = 2$ és $x_{n+1} = x_n^{x_n}$, $n \geqslant 1$?

A) 2^{2^3} **B)** 2^{2^4} **C)** $2^{2^{11}}$ **D)** $2^{2^{16}}$ **E)** $2^{2^{768}}$

14. Az $ABCD$ téglalapban a BC oldal hosssza egyenlő az AC átló hosszának a felével. Legyen M olyan pont a CD oldalon, hogy $AM = MC$. Mekkora a $CAM\sphericalangle$ mértéke?

A) $12{,}5°$ **B)** $15°$ **C)** $27{,}5°$ **D)** $42{,}5°$ **E)** egy másik érték

15. Dóri egy 2016 területű téglalapot feldarabolt 56 darab egyenlő négyzetre. A téglalap és a négyzet oldalainak hosszúságai egész számok. Hány különböző téglalap esetén tehette ezt meg?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

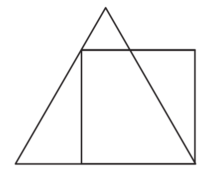
16. A Lovagok és Lókötők Szigetén minden szigetlakó vagy lovag (aki mindig igazat mond) vagy lókötő (aki mindig hazudik). A szigeten való utazásod során 7 szigetlakóval találkozol, akik a tábortűz körül ülnek. Közülük mindegyik azt fogja mondani: „Két lókötő között ülök!” Hány lókötő van közöttük?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** további információra van szükség

17. Az $x^2 + ax + b = 0$ és $x^2 + bx + a = 0$ egyenletek megoldásai valós számok. Ha az első egyenlet megoldásai négyzetének összege egyenlő a második egyenlet megoldásai négyzetének összegével és $a \neq b$, akkor az $a + b$ egyenlő:

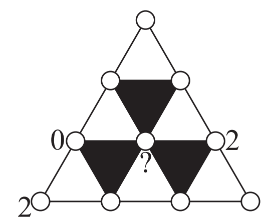
A) 0 **B)** -2 **C)** 4 **D)** -4 **E)** nem lehet meghatározni

18. Ha az ábrán látható négyzet kerülete 4, akkor az egyenlő oldalú háromszög kerülete egyenlő:



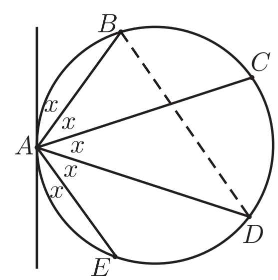
A) 4 **B)** $3 + \sqrt{3}$ **C)** 3 **D)** $3 + \sqrt{2}$ **E)** $4 + \sqrt{3}$

19. Az ábrán látható tíz pont mindegyike 0-val, 1-gyel vagy 2-vel van jelölve. Tudjuk, hogy a fehér háromszögek csúcsaiban levő számok összege osztható 3-mal, míg a fekete háromszögek csúcsaiban levő számok összege nem osztható 3-mal. Három csúcs be van jelölve az ábrán látható módon. Milyen számokkal jelölhetjük a középső csúcsot?



A) csak 0-val **B)** csak 1-gyel **C)** csak 2-vel
D) 0-val vagy 1-gyel **E)** 0-val, 1-gyel vagy 2-vel

20. Julcsi egy körre az A pontban érintőt szerkesztett, majd berajzolta a B, C, D és E pontokat úgy, hogy a bejelölt szögek egyenlőek legyenek (lásd az ábrát). Mekkora az $ABD\sphericalangle$ mértéke?



A) $66°$ **B)** $70{,}5°$ **C)** $72°$ **D)** $75°$ **E)** $77{,}5°$

5 pontos feladatok

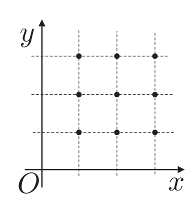
21. Hány különböző megoldása van az $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$ egyenletnek?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** végtelen sok

22. Egy négyszög kerületének és a négyszögbe beírt kör kerületének aránya $4 : 3$. A négyszög területének és a kör területének aránya:

A) $4 : \pi$ **B)** $3\sqrt{2} : \pi$ **C)** $16 : 9$ **D)** $\pi : 3$ **E)** $4 : 3$

23. Hány olyan x független változójú másodfokú függvény van, amelynek grafikonja az ábrán bejelölt pontok közül legalább 3-at tartalmaz?



A) 6 **B)** 15 **C)** 19 **D)** 22 **E)** 27

24. Az ABC derékszögű háromszögben (A csúcsnál van a derékszög) a hegyesszögek szögfelezői a P pontban metszik egymást. Ha a P pont átfogótól való távolsága $\sqrt{8}$, akkor mekkora a P pont A csúcstól való távolsága?

A) 8 **B)** 3 **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{12}$ **E)** 4

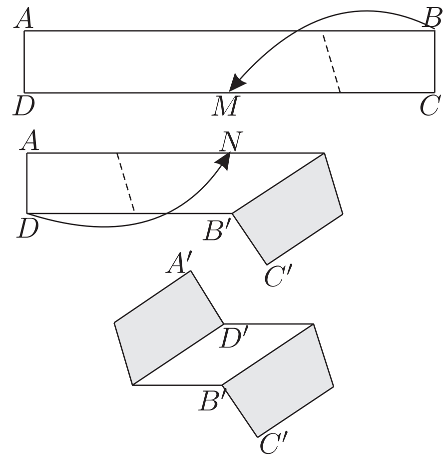
25. Az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek segítségével felírtunk három háromjegyű számot (minden számjegyet csak egyszer használtunk fel). A következő számok közül melyik nem lehet a három felírt szám összege?

A) 1500 **B)** 1503 **C)** 1512 **D)** 1521 **E)** 1575

26. A kocka egy belső pontját összekötöttük a kocka mindegyik csúcspontjával, s így a kockát feldaraboltuk 6 gúlára. A kapott gúlák közül ötnek a térfogata, rendre, 2, 5, 10, 11 és 14. Mekkora a hatodik gúla térfogata?

A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

27. Az 5 cm szélességű és 50 cm hosszúságú téglalap alakú $ABCD$ papírszalag egyik oldala fehér, a másik oldala pedig szürke (lásd az ábrát). Kriszta összehajtotta a szalagot először úgy, hogy a B csúcs az M ponttal essen egybe, ahol az M pont a CD oldal felezőpontja. Egy újabb hajtogatás után a D pont egybeesett az N ponttal, ahol az N pont az AB oldal felezőpontja. Mekkora a két hajtogatás után a szalag látható fehér részének a területe cm^2-ben?

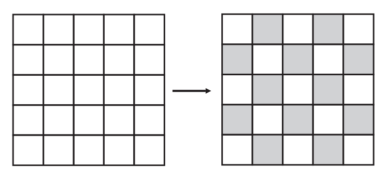


A) 50 **B)** 60 **C)** 62,5
D) 100 **E)** 125

28. Anna kiválasztott egy n természetes számot, majd összeadta a számokat 1-től n-ig. A p prímszám osztója a kapott összegnek, de nem osztója egyik összeadandónak sem. A következő számok közül melyik lehet egyenlő az $n + p$ összeggel?

A) 217 **B)** 221 **C)** 229 **D)** 245 **E)** 269

29. Tekintsük a 25 mezőre felosztott 5×5-ös táblázatot (lásd az ábrát). Kezdetben minden mező fehér. Minden lépésben meg lehet változtatni egy sorban vagy egy oszlopban három egymás után következő mezőt az ellenkező színűre (azaz a fehér mezők szürkére, a szürke mezők pedig fehérre változnak). Mennyi az a legkevesebb számú lépés, amely szükséges ahhoz, hogy megkapjuk a jobb oldali ábrán látható sakktáblát?



A) kevesebb mint 10 **B)** 10 **C)** 12 **D)** több mint 12 **E)** megoldhatatlan

30. Az N természetes számnak pontosan hat különböző (pozitív) osztója van, beleértve az 1-et és az N-t is. Közülük ötnek a szorzata 648. A hatodik osztó a:

A) 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 24

Feladatok: „Kangaroo Meeting 2015”, Göteborg, Svédország
A verseny szervezője: Szerbiai Matematikusok Egyesülete
Fordította: dr. Péics Hajnalka
Lektorálta: mgr. Csikós Pajor Gizella, Béres Zoltán
E-mail: drustvomatematicara@yahoo.com
URL: http://www.dms.rs