Matematičko takmičenje „Kengur bez granica” 2016.
11 – 12. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

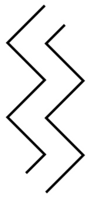
1. Milan i Jovan zajedno imaju 23 godine, Jovan i Aleksa 24, a Milan i Aleksa imaju 25 godina. Koliko godina ima najstariji od njih?

A) 10 **B)** 11 **V)** 12 **G)** 13 **D)** 14

2. Zbir $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ je jednak:

A) $\frac{3}{111}$ **B)** $\frac{111}{1110}$ **V)** $\frac{111}{1000}$ **G)** $\frac{3}{1000}$ **D)** $\frac{3}{1110}$

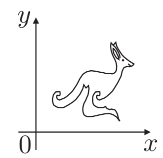
3. Veljko želi da sagradi most preko reke, a zna da most najmanje dužine može sagraditi sa bilo kog mesta na obali reke. Preko koje reke Veljko ne može sagraditi takav most?

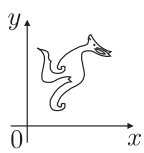
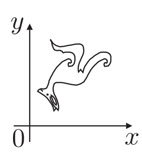
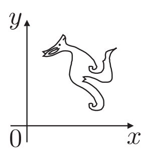
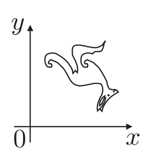
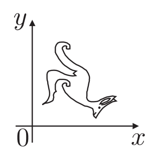
A)  **B)**  **V)**  **G)**  **D)** 

4. Koliko ima celih brojeva većih od $2015 \cdot 2017$, a manjih od $2016 \cdot 2016$?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2015 **G)** 2016 **D)** 2017

5. Skup tačaka u ravni xOy formira sliku kengura (videti sliku desno). Kako izgleda odgovarajući skup tačaka ako za svaku tačku ravni xOy koordinate x i y zamene mesta?

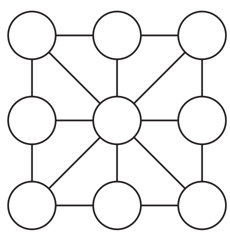


A)  **B)**  **V)**  **G)**  **D)** 

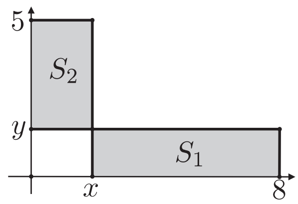
6. Koliko je najmanje ravni potrebno da se ograniči proizvoljni konačni deo trodimenzionalnog prostora?

A) 3 **B)** 4 **V)** 5 **G)** 6 **D)** 7

7. Tamara želi da upiše devet celih brojeva u kružna polja na slici tako da za osam malih trouglova čija su temena spojena dužima važi da su zbirovi brojeva upisanih u krugove u njihovim temenima jednaki. Koliko najviše različitih brojeva ona može koristiti?



A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 5 **D)** 8

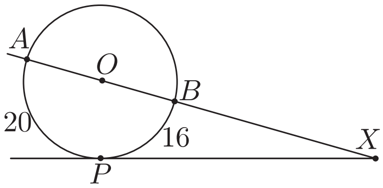


8. Pravougaonici S_1 i S_2 na slici imaju jednake površine. Odrediti odnos $\frac{x}{y}$.

A) 1 **B)** $\frac{3}{2}$ **V)** $\frac{4}{3}$ **G)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{8}{5}$

9. Ako je $x^2 - 4x + 2 = 0$, tada je $x + \frac{2}{x}$ jednako

A) -4 **B)** -2 **V)** 0 **G)** 2 **D)** 4



10. Dužine lukova AP i BP kruga sa centrom u tački O na slici su redom 20 i 16. Kolika je mera $\sphericalangle AXP$?

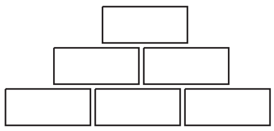
A) 30° **B)** 24° **V)** 18° **G)** 15° **D)** 10°

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Prirodni brojevi a, b, c i d zadovoljavaju jednakosti $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Koji od ova četiri broja je najveći?

A) a **B)** b **V)** c **G)** d **D)** nije jedinstveno određeno

12. U piramidi na slici svako polje sadrži broj koji predstavlja proizvod brojeva koji su u dva polja neposredno ispod. Koji od sledećih brojeva ne može biti u polju na vrhu piramide, ako tri polja na najnižem nivou sadrže prirodne brojeve veće od 1?



A) 56 **B)** 84 **V)** 90 **G)** 105 **D)** 220

13. Odrediti x_4, ako je $x_1 = 2$ i $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ za $n \geqslant 1$.

A) 2^{2^3} **B)** 2^{2^4} **V)** $2^{2^{11}}$ **G)** $2^{2^{16}}$ **D)** $2^{2^{768}}$

14. U pravougaoniku $ABCD$ dužina stranice BC jednaka je polovini dužine dijagonale AC. Neka je M tačka na stranici CD takva da je $AM = MC$. Kolika je mera $\sphericalangle CAM$?

A) $12{,}5^\circ$ **B)** 15° **V)** $27{,}5^\circ$ **G)** $42{,}5^\circ$ **D)** neka druga vrednost

15. Natalija je isekla pravougaonik površine 2016 na 56 jednakih kvadrata. Dužine stranica pravougaonika i kvadrata su celi brojevi. Za koliko različitih pravougaonika je ovo mogla da uradi?

A) 2 **B)** 4 **V)** 6 **G)** 8 **D)** 0

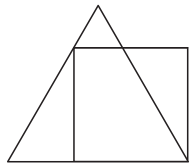
16. Na ostrvu Manab svaki stanovnik je ili vitez (uvek govori istinu) ili lopov (uvek govori laž). Na putovanju po ostrvu srešćeš 7 stanovnika kako sede oko logorske vatre. Svi će ti reći: „Ja sedim između dva lopova!” Koliko je lopova među njima?

A) 3 **B)** 4 **V)** 5 **G)** 6 **D)** potrebno je još informacija

17. Jednačine $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + bx + a = 0$ imaju realna rešenja. Ako je zbir kvadrata rešenja prve jednačine jednak zbiru kvadrata rešenja druge jednačine i $a \neq b$, tada je zbir $a + b$ jednak:

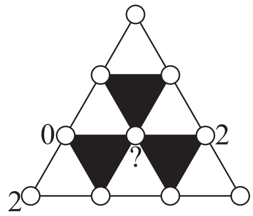
A) 0 **B)** -2 **V)** 4 **G)** -4 **D)** nije moguće odrediti

18. Ako je obim kvadrata na slici jednak 4, tada je obim jednakostraničnog trougla jednak:



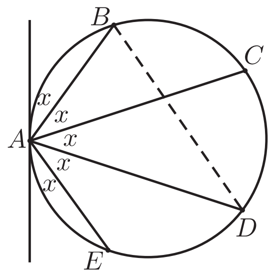
A) 4 **B)** $3+\sqrt{3}$ **V)** 3 **G)** $3+\sqrt{2}$ **D)** $4+\sqrt{3}$

19. Svaka od deset tačaka na slici označena je sa 0, 1 ili 2. Poznato je da je zbir brojeva u temenima belih trouglova deljiv sa 3, dok zbir brojeva u temenima crnih trouglova nije deljiv sa 3. Tri temena su označena kao što je prikazano na slici. Kojim brojevima možemo označiti centralno teme?



A) samo brojem 0 **B)** samo brojem 1 **V)** samo brojem 2
G) brojevima 0 ili 1 **D)** brojevima 0, 1 ili 2

20. Jovana je konstruisala tangentu kruga u tački A, a zatim označila tačke B, C, D i E tako da su označeni uglovi jednaki (videti sliku). Kolika je mera $\sphericalangle ABD$?



A) 66° **B)** 70,5° **V)** 72° **G)** 75° **D)** 77,5°

Zadaci koji vrede 5 poena

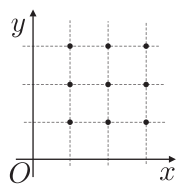
21. Koliko različitih rešenja ima jednačina $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** beskonačno mnogo

22. Odnos obima četvorougla i obima kruga upisanog u taj četvorougao je $4 : 3$. Odnos površina četvorougla i kruga jednak je:

A) $4 : \pi$ **B)** $3\sqrt{2} : \pi$ **V)** $16 : 9$ **G)** $\pi : 3$ **D)** $4 : 3$

23. Koliko ima kvadratnih funkcija nezavisne promenljive x takvih da njihov grafik sadrži najmanje 3 označene tačke na slici?



A) 6 **B)** 15 **V)** 19 **G)** 22 **D)** 27

24. U pravouglom trouglu ABC (sa pravim uglom kod temena A) simetrale oštrih uglova seku se u tački P. Ako je rastojanje od tačke P do hipotenuze $\sqrt{8}$, koliko je rastojanje od tačke P do temena A?

A) 8 **B)** 3 **V)** $\sqrt{10}$ **G)** $\sqrt{12}$ **D)** 4

25. Tri trocifrena broja su formirana od cifara $1, 2, \ldots, 9$ (svaka cifra je upotrebljena tačno jednom). Koji od sledećih brojeva ne može biti jednak zbiru ta tri broja?

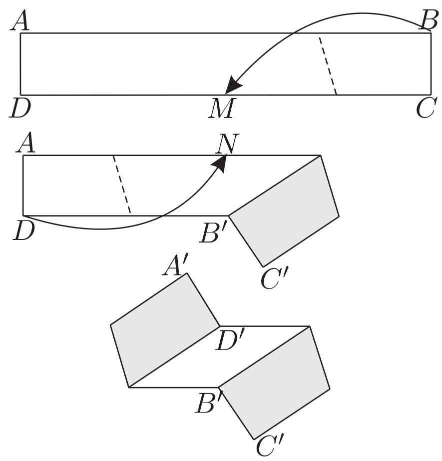
A) 1500 **B)** 1503 **V)** 1512 **G)** 1521 **D)** 1575

26. Kocka je podeljena na 6 piramida spajanjem date tačke u unutrašnjosti kocke sa svakim od temena kocke. Zapremine pet dobijenih piramida su 2, 5, 10, 11 i 14. Kolika je zapremina šeste piramide?

A) 1 **B)** 4 **V)** 6 **G)** 9 **D)** 12

27. Pravougaona papirna traka $ABCD$ širine 5 cm i dužine 50 cm je bela sa jedne strane, a siva sa druge (videti sliku). Kristina je presavijajući traku spojila teme B sa tačkom M koja je središte stranice CD. Presavijajući ponovo, ona je spojila teme D sa tačkom N koja je središte stranice AB. Kolika je površina u cm^2 vidljivog belog dela trake nakon presavijanja?

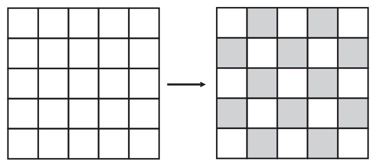
A) 50 **B)** 60 **V)** 62,5
G) 100 **D)** 125



28. Ana je izabrala prirodan broj n i zapisala zbir svih brojeva od 1 do n. Prost broj p deli zbir, ali ne deli nijedan od sabiraka. Koji od sledećih brojeva može biti jednak zbiru $n + p$?

A) 217 **B)** 221 **V)** 229 **G)** 245 **D)** 269

29. Posmatrajmo tablu 5×5 podeljenu na 25 polja (videti sliku). U početku sva polja su bela. U svakom koraku dozvoljeno je promeniti tri uzastopna polja u vrsti ili u koloni u suprotne boje (tj. bela polja postaju siva, a siva postaju bela). Koji je najmanji broj mogućih poteza da bi se dobila šahovska tabla kao na slici desno?



A) manje od 10 **B)** 10 **V)** 12 **G)** više od 12 **D)** nije moguće uraditi

30. Prirodan broj N ima tačno šest različitih delilaca uključujući 1 i N. Proizvod pet od njih je 648. Šesti delilac je:

A) 4 **B)** 8 **V)** 9 **G)** 12 **D)** 24

Zadaci: „Kangaroo Meeting 2015”, Geteborg, Švedska
Organizator takmičenja: Društvo matematičara Srbije
Prevod: prof. dr Marija Stanić, Nenad Stojanović
Recenzent: prof. dr Zoran Kadelburg
E-mail: `drustvomatematicara@yahoo.com`
URL: `http://www.dms.rs`