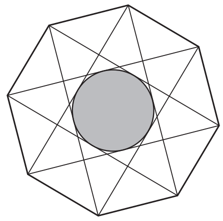
Kenguru Határok Nélkül Matematika Verseny 2013.
11 – 12. osztály

3 pontos feladatok

1. Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb?

A) 2013 **B)** 2^{0+13} **C)** 20^{13} **D)** 201^3 **E)** $20 \cdot 13$

2. Az ábrán levő szabályos nyolcszög oldalának hossza 10. Mekkora a nyolcszög átlói által meghatározott kisebb nyolcszög beírható körének sugara?



A) 10 **B)** 7,5 **C)** 5 **D)** 2,5 **E)** 2

3. Egy hasábnak összesen 2013 oldala van. Hány éle van ennek a hasábnak?

A) 2011 **B)** 2013 **C)** 4022 **D)** 4024 **E)** 6033

4. Mennyi a 3^{3^3} harmadik gyöke?

A) 3^3 **B)** 3^{3^3-1} **C)** 3^{2^3} **D)** 3^{3^2} **E)** $(\sqrt{3})^3$

5. A 2013-as évszám egymást követő számjegyekből áll: $0, 1, 2$ és 3. Hány év telt el azóta, hogy utoljára egy évszám négy egymást követő számjegyből állt?

A) 467 **B)** 527 **C)** 581 **D)** 693 **E)** 990

6. Legyen f egy lineáris függvény, amelyre $f(2013) - f(2001) = 100$. Mennyi az $f(2031) - f(2013)$ értéke?

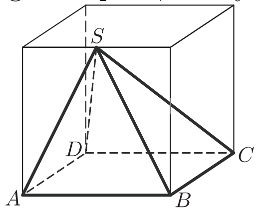
A) 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

7. Ha tudod, hogy $2 < x < 3$, a következő állítások közül hány igaz?

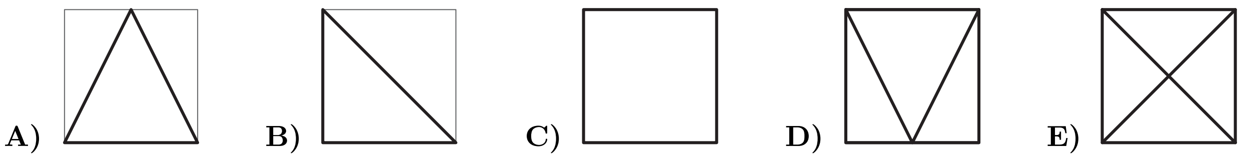
$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8. Az ábrán látható átlátszó kockában egy nem átlátszó $ABCDS$ gúla helyezkedik el, amelynek alapja az $ABCD$ négyszög, csúcsa pedig az S pont, amely a kocka egyik élének felezőpontja.



A kockát megnézzük felülről, alulról, elölről, hátulról, jobb oldalról és bal oldalról. Melyik képet nem láthatjuk egyik oldalról sem?



9. Hat pandúr 20 betyárt fogott el. Az első pandúr egy betyárt, a második két betyárt, a harmadik pedig három betyárt. A negyedik pandúr több betyárt fogott el, mint a többi öt pandúr külön-külön. Legalább hány betyárt fogott el a negyedik pandúr?

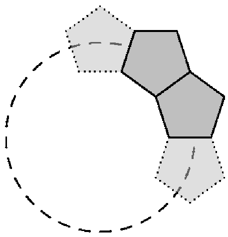
A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

10. Amikor egy bizonyos anyagot szilárd állapotból felolvasztunk, a térfogata $\frac{1}{12}$-ével növekszik. Hanyad részével csökken a térfogata, amikor újra megszilárdul?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

4 pontos feladatok

11. Robinak több egyforma nagyságú szabályos ötszög alakú műanyag lapocskája van. Az ötszögeket oldalaikkal egymás mellé ragasztja úgy, hogy egy ,,kört" alkossanak. Lásd az ábrát. Hány lapocska szükséges, hogy bezáruljon a kör?

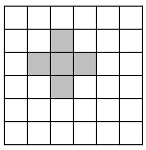
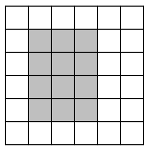
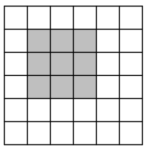
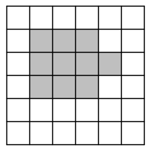
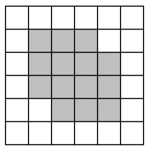


A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

12. Hány olyan n természetes szám van, amelyre igaz, hogy $\frac{n}{3}$ és $3n$ is háromjegyű számok?

A) 12 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 100 **E)** 300

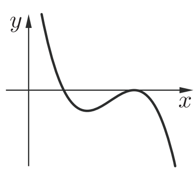
13. A padlóra, amelyet négyzet alakú csempék borítanak, egy kör alakú szőnyeget terítettünk. Azokat a csempéket, amelyeknek több, mint egy közös pontjuk van a szőnyeggel, szürkére festettük. Az alábbi ábrák közül melyik nem lehetséges?

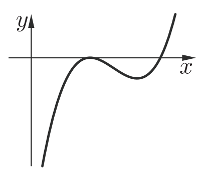
A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

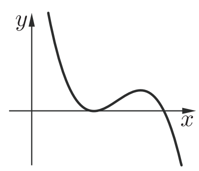
14. Az egész számok halmazán értelmezett f függvényről a következőt állítjuk: ,,Minden páros x-re $f(x)$ is páros." Hogyan hangzik ennek az állításnak a tagadása?

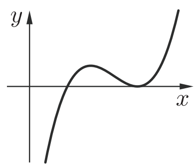
A) Minden páros x-re $f(x)$ páratlan. **B)** Minden páratlan x-re $f(x)$ páros.
C) Minden páratlan x-re $f(x)$ is páratlan. **D)** Van olyan páros x, amelyre $f(x)$ páratlan.
E) Létezik olyan páratlan x, hogy $f(x)$ páratlan.

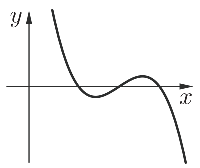
15. Adott a $W(x) = (a-x)(b-x)^2$ függvény, ahol $a < b$. Az alábbi grafikonok közül melyik ennek a függvénynek a grafikonja?

A) 

B) 

C) 

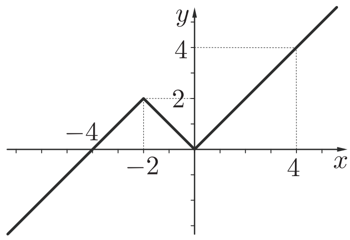
D) 

E) 

16. Egy téglalap egyik oldalának hossza 5 egység. A téglalapot két részre vágjuk, egy négyzetre és egy téglalapra. Az egyik rész területe 4 egység. Hány különböző ilyen téglalap létezik?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

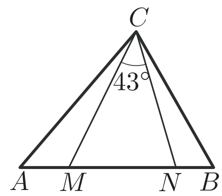
17. Vince ábrázolta az $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ függvényt, amelynek grafikonja két félegyenesből és egy szakaszból áll (lásd az ábrát).



Hány megoldása van az $f(f(f(x))) = 0$ egyenletnek?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

18. Az ABC háromszög AB oldalán az M és az N pontok úgy helyezkednek el, hogy $AN = AC$ és $BM = BC$. Ha az $MCN\sphericalangle = 43°$, mennyi az $ACB\sphericalangle$?



A) 86° **B)** 89° **C)** 90° **D)** 92° **E)** 94°

19. Hány $(x; y)$ természetes számpár elégíti ki az $x^2y^3 = 6^{12}$ egyenletet?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** másik válasz

20. Egy dobozban 900 számkártya van, amelyekre 100-tól 999-ig írtuk fel a számokat. Mindegyik számkártyán különböző szám van. Filip egyesével veszi ki a kártyákat a dobozból, és mindegyik szám esetén kiszámítja a számjegyek összegét. Legalább hány kártyát kell kihúznia ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük három olyan szám, amelyek számjegyeinek összege egyenlő?

A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

5 pontos feladatok

21. Hány olyan $(x; y)$ egész számpár van, amelyekre $x \leqslant y$, és a szorzatuk az összegük ötszörösével egyenlő?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22. Adott az $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: f periodikus, a periódus hossza 5 és a $[-2; 3)$ intervallumon $x \mapsto f(x) = x^2$. Mennyi $f(2013)$ értéke?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9

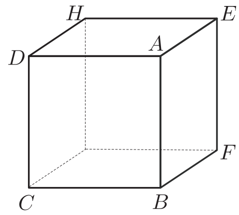
23. Hány valós $(x; y)$ számpár megoldása van az $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ egyenletnek?

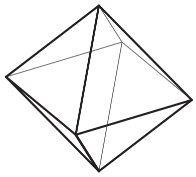
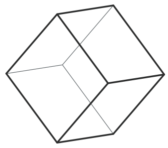
A) 1 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** végtelen sok

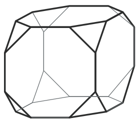
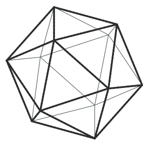
24. A síkban adott néhány egyenes. Az a pontosan hármat metsz a többi egyenes közül, a b pedig pontosan négy másik egyenest metsz. A c egyenes pontosan n darab másik egyenest metsz, ahol $n \neq 3$ és $n \neq 4$. Hány egyenes van megadva a síkon?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** másik válasz

25. Egy tömör kockát szétvágtunk egy síkkal, amely áthalad a kocka három A csúccsal szomszédos csúcsán, D-n, E-n és B-n. Hasonlóan, a másik 7 csúccsal szomszédos csúcsokon áthaladó síkokkal is elmetsszük a kockát. Hogyan néz ki az a rész, amely a kocka középpontját tartalmazza?



A)  **B)** 

C)  **D)**  **E)** A kocka középpontja több alakzatban is benne van.

26. Az $f : \mathrm{N}_0 \to \mathrm{N}_0$ függvényt a következő módon adtuk meg: $f(n) = \dfrac{n}{2}$, ha n páros, illetve $f(n) = \dfrac{n-1}{2}$, ha n páratlan. Az $f^k(n)$ jelölje azt a pontosan k darab f-et tartalmazó kifejezést, amely $f(f(\ldots f(n)\ldots))$ alakú. Hány megoldása van az $f^{2013}(n) = 1$ egyenletnek?

A) 0 **B)** 4026 **C)** 2^{2012} **D)** 2^{2013} **E)** végtelen sok

27. Az első n természetes szám összege egy olyan háromjegyű szám, amelynek mindhárom számjegye azonos. Mennyi az n szám számjegyeinek az összege?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

28. Egy szigetnek csak kétféle lakosa van: lovagok (akik mindig igazat mondanak) és hazugok (akik mindig hazudnak). Egy turista két szigetlakóval találkozott és a magasabbat megkérdezte, hogy mindketten lovagok-e. A lakos válaszolt, de a turista ennek alapján nem tudta eldönteni, hogy kik is ők. Ezért megkérdezte az alacsonyabbat, hogy a magasabb lakos lovag-e. Ezután a turista már tudta, hogy kik is ők. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) Mindketten lovagok. **B)** Mindketten hazugok.
C) A magasabb lovag, az alacsonyabb hazug. **D)** A magasabb hazug, az alacsonyabb lovag.
E) Ezekből az adatokból nem lehet eldönteni.

29. Juli egy olyan algoritmust készített, amellyel egy számsorozatot lehet létrehozni: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, ahol m és n természetes számok. Mennyi az a_{100} értéke?

A) 100 **B)** 1000 **C)** 2012 **D)** 4950 **E)** 5050

30. Ha a és b olyan természetes számok, amelyekre $a^4 + a^5 + a^6 + b^6 + b^7 + b^8 + b^9 = 2013$, mennyi az $a + b$ értéke?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Feladatok: "Kangaroo Meeting 2012", Protaras, Ciprus
A verseny szervezője: Szerbiai Matematikusok Egyesülete
Fordította: Zita Diana, matematika szakos tanár
Lektorálta: Béres Zoltán, matematika szakos tanár
E-mail: `info@dms.org.rs`
URL: `http://www.dms.org.rs`