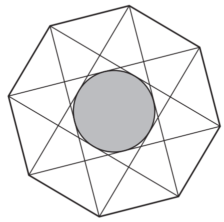
Математичко такмичење „Кенгур без граница” 2013.
11 – 12. разред

Задаци који вреде 3 поена

1. Који је од датих бројева највећи?

А) 2013 **Б)** 2^{0+13} **В)** 20^{13} **Г)** 201^3 **Д)** $20 \cdot 13$

2. Дужина странице правилног осмоугла на слици је 10. Колика је дужина полупречника круга уписаног у мањи осмоугао, који је добијен помоћу дијагонала?



А) 10 **Б)** 7,5 **В)** 5 **Г)** 2,5 **Д)** 2

3. Призма има укупно 2013 страна. Колико ивица има та призма?

А) 2011 **Б)** 2013 **В)** 4022 **Г)** 4024 **Д)** 6033

4. Одредити трећи корен броја 3^{3^3}.

А) 3^3 **Б)** 3^{3^3-1} **В)** 3^{2^3} **Г)** 3^{3^2} **Д)** $(\sqrt{3})^3$

5. 2013. година има особину да њен број садржи узастопне цифре $0, 1, 2,$ и 3. Колико година је прошло након што се последњи пут догодило да број године садржи четири узастопне цифре?

А) 467 **Б)** 527 **В)** 581 **Г)** 693 **Д)** 990

6. Нека је f линеарна функција за коју је $f(2013) - f(2001) = 100$. Одредити $f(2031) - f(2013)$.

А) 75 **Б)** 100 **В)** 120 **Г)** 150 **Д)** 180

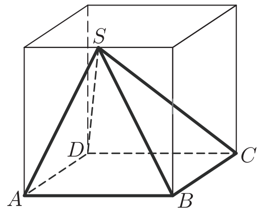
7. Ако $2 < x < 3$, колико је од следећих тврђења

$$4 < x^2 < 9, \quad 4 < 2x < 9, \quad 6 < 3x < 9, \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

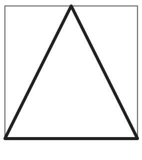
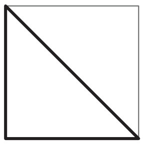
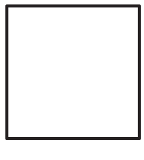
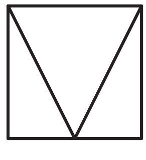
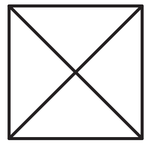
тачно?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

8. Унутар провидне коцке на слици налази се непровидна пирамида $ABCDS$ са основом $ABCD$, чије теме S лежи на средини ивице коцке.



Коцка се гледа одозго, одоздо, са предње стране, са задње стране, са леве и са десне стране. Која се слика не може видети?

А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

9. Шест хероја је ухватило 20 негативаца. Први херој је ухватио једног негативца, други два и трећи је ухватио три негативца. Четврти херој је ухватио више негативаца него било који од осталих пет. Колико је најмање негативаца морао да ухвати четврти херој?

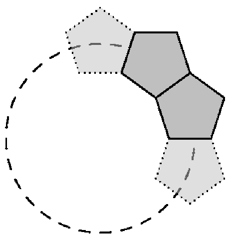
А) 7 **Б)** 6 **В)** 5 **Г)** 4 **Д)** 3

10. Када се извесна супстанца у чврстом стању растопи, њена запремина се повећа за $\frac{1}{12}$. За колико се смањи њена запремина када се поново врати у чврсто стање?

А) $\frac{1}{10}$ **Б)** $\frac{1}{11}$ **В)** $\frac{1}{12}$ **Г)** $\frac{1}{13}$ **Д)** $\frac{1}{14}$

Задаци који вреде 4 поена

11. Радован има идентичне пластичне плочице облика правилног петоугла. Он их лепи страницу за страницу тако да затвори круг као што је приказано на слици. Колико плочица је потребно да се затвори круг?

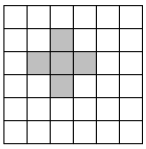
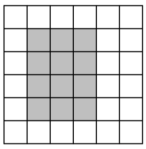
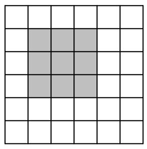
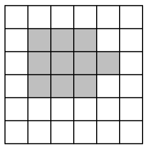
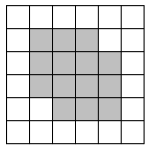


А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 12 **Д)** 15

12. Колико има природних пројева n са особином да су и $\frac{n}{3}$ и $3n$ троцифрени бројеви?

А) 12 **Б)** 33 **В)** 34 **Г)** 100 **Д)** 300

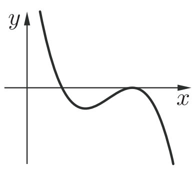
13. Тепих облика круга је стављен на под који је прекривен квадратним плочицама. Све плочице које имају више од једне заједничке тачке са тепихом су означене сивом бојом. Која од датих слика није могућа?

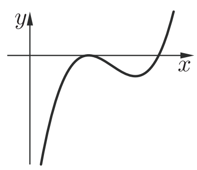
А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

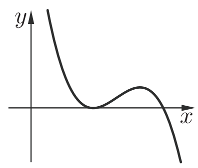
14. За функцију f на скупу целих бројева дат је следећи исказ: „За свако парно x, $f(x)$ је парно." Како гласи негација овог исказа?

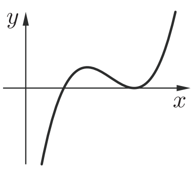
А) За свако парно x, $f(x)$ је непарно. **Б)** За свако непарно x, $f(x)$ је парно.
В) За свако непарно x, $f(x)$ је непарно. **Г)** Постоји парно x тако да је $f(x)$ непарно.
Д) Постоји непарно x тако да је $f(x)$ непарно.

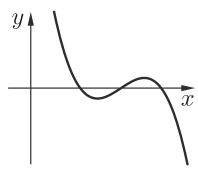
15. Дата је функција $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, где је $a < b$. Који од следећих графика представља график дате функције?

А) 

Б) 

В) 

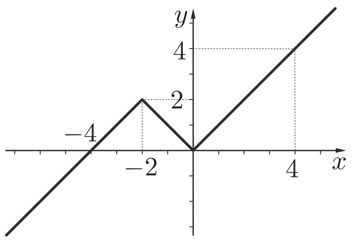
Г) 

Д) 

16. Дужина једне странице правоугаоника је 5. Правоугаоник је исечен на два дела: квадрат и правоугаоник. Површина једног од та два дела једнака је 4. Колико има различитих таквих правоугаоника?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

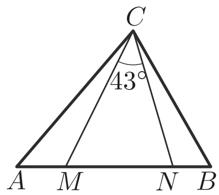
17. Влада је нацртао график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, који се састоји од две полуправе и једне дужи (види слику).



Колико једначина $f(f(f(x))) = 0$ има решења?

А) 4 **Б)** 3 **В)** 2 **Г)** 1 **Д)** 0

18. У троуглу ABC тачке M и N на страници AB су такве да је $AN = AC$ и $BM = BC$. Ако је $\sphericalangle MCN = 43°$, одредити $\sphericalangle ACB$.



А) 86° **Б)** 89° **В)** 90° **Г)** 92° **Д)** 94°

19. Колико парова (x, y) природних бројева задовољава једначину $x^2y^3 = 6^{12}$?

А) 6 **Б)** 8 **В)** 10 **Г)** 12 **Д)** други одговор

20. У кутији се налази 900 картица означених бројевима од 100 до 999. Свака картица је означена другим бројем. Филип извлачи неке картице и за сваку од њих рачуна збир цифара броја којим је обележена. Колико најмање картица мора да извуче да би био сигуран да има три картице са истим збиром цифара?

А) 51 **Б)** 52 **В)** 53 **Г)** 54 **Д)** 55

Задаци који вреде 5 поена

21. Колико има парова целих бројева (x, y), код којих је $x \leqslant y$, таквих да је њихов производ једнак петострукој вредности њиховог збира?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7 **Д)** 8

22. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција одређена следећим особинама: f је периодична са периодом 5 и рестрикција функције f на $[-2, 3)$ је $x \mapsto f(x) = x^2$. Одредити $f(2013)$.

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4 **Д)** 9

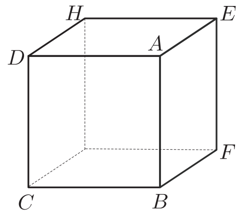
23. Колико решења (x, y), где су x и y реални бројеви има једначина $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

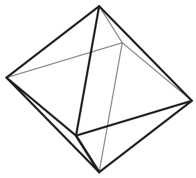
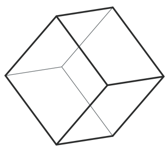
А) 1 **Б)** 5 **В)** 8 **Г)** 9 **Д)** бесконачно много

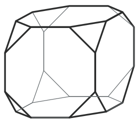
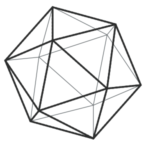
24. У равни је нацртано неколико правих. Права a сече тачно три од осталих правих, а права b сече тачно четири од осталих правих. Права c сече тачно n од осталих правих, при чему је $n \neq 3$ и $n \neq 4$. Колико је правих нацртано у равни?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7 **Д)** други одговор

25. Чврста коцка на слици пресечена је са равни која пролази кроз три темена, D, E и B, која су суседна темену A. Слично, коцка је пресечена са равни која пролази кроз три суседна темена свих осталих 7 темена. Како изгледа део у коме се налази центар коцке?



А)  **Б)** 

В)  **Г)**  **Д)** Центар коцке налази се у неколико делова.

26. Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ дата је са $f(n) = \frac{n}{2}$, ако је n паран број, а $f(n) = \frac{n-1}{2}$ ако је n непаран број. За сваки природан број k, $f^k(n)$ означава број представљен изразом $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, где се симбол f појављује k пута. Колико решења има једначина $f^{2013}(n) = 1$?

А) 0 **Б)** 4026 **В)** 2^{2012} **Г)** 2^{2013} **Д)** бесконачно много

27. Збир првих n природних бројева је троцифрени број код ког су све цифре једнаке. Одредити збир цифара броја n.

А) 6 **Б)** 9 **В)** 12 **Г)** 15 **Д)** 18

28. На острву живе само два типа људи: витезови (који увек говоре истину) и подлаци (који увек лажу). Туриста је срео два човека који живе на острву и питао вишег од њих да ли су они обојица витезови. Он му је одговорио, али на основу тог одговора туриста није могао да закључи ко су они. Зато је питао нижег да ли је виши витез. Након његовог одговора туриста је знао ко су они. Који је од понуђених одговора тачан?

А) Оба су витезови. **Б)** Оба су подлаци.
В) Виши је витез, а нижи подлац. **Г)** Виши је подлац, а нижи је витез.
Д) Није дато довољно података.

29. Јулија је направила алгоритам који креира низ бројева: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, где су m и n природни бројеви. Одредити a_{100}.

А) 100 **Б)** 1000 **В)** 2012 **Г)** 4950 **Д)** 5050

30. Ако су a и b природни бројеви такви да је $a^4 + a^5 + a^6 + b^6 + b^7 + b^8 + b^9 = 2013$, одредити $a + b$.

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7 **Д)** 8

Задаци: "Kangaroo Meeting 2012", Протарас, Кипар
Организатор такмичења: Друштво математичара Србије
Превод: проф. др Марија Станић
Рецензент: проф. др Зоран Каделбург
E-mail: info@dms.org.rs
URL: http://www.dms.org.rs