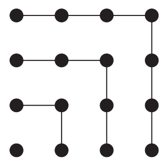
Математичко такмичење „Кенгур без граница“ 2010.
11 – 12. разред

Задаци који вреде 3 поена

1. Помоћу слике можемо приметити да је $1+3+5+7=4\cdot 4$. Колико је $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?



А) $14\cdot 14$ **Б)** $9\cdot 9$ **В)** $4\cdot 4\cdot 4$
Г) $16\cdot 16$ **Д)** $7\cdot 9$

2. Ако је збир бројева у обе врсте дате табеле једнак, коју вредност има симбол $*$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

А) 1010 **Б)** 1020 **В)** 1910 **Г)** 1990 **Д)** 2020

3. Две празне коцке имају површине основа $1\,\mathrm{dm}^2$ и $4\,\mathrm{dm}^2$, респективно. Желимо да напунимо већу коцку изворском водом коју захватамо мањом коцком. Колико пута морамо ићи на извор?

А) 2 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 8 **Д)** 16

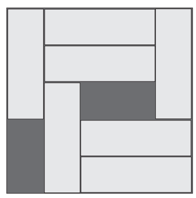
4. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 5 чије су све цифре непарне?

А) 900 **Б)** 625 **В)** 250 **Г)** 125 **Д)** 100

5. Директор компаније је изјавио:„Сви запослени у нашој компанији имају најмање 25 година.“ Касније се испоставило да то није тачно. То значи да:

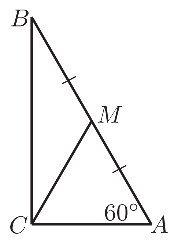
А) сви запослени у компанији имају тачно 25 година
Б) сви запослени у компанији имају више од 26 година
В) нико од запослених у компанији још нема 25 година
Г) неко од запослених у компанији има мање од 25 година
Д) неко од запослених у компанији има тачно 26 година

6. Седам плоча димензија $3\,\mathrm{cm}\times 1\,\mathrm{cm}$ је у кутији димензије $5\,\mathrm{cm}\times 5\,\mathrm{cm}$ (види слику). Колико је најмање плоча потребно померити да би у кутији било простора за још једну плочу (плоче се не смеју преклапати)?



А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** немогуће је

7. Троугао ABC на слици је правоугли, M је средиште хипотенузе AB и $\sphericalangle A=60^\circ$. Одредити величину угла BMC.



А) 105° **Б)** 108° **В)** 110° **Г)** 120° **Д)** 125°

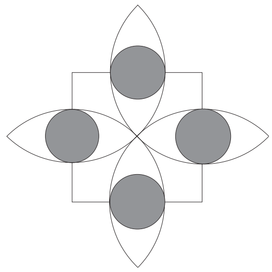
8. Који од следећих бројева може бити једнак броју ивица неке призме?

А) 100 **Б)** 200 **В)** 2008 **Г)** 2009 **Д)** 2010

9. Колико двоцифрених бројева $\overline{xy}$ има цифре x и y са особином $(x-3)^2+(y-2)^2=0$?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 6 **Г)** 32 **Д)** ниједан

10. Дужина странице квадрата на слици је 2, а полукружнице имају центре у теменима квадрата и пролазе кроз центар квадрата. Осенчени кругови имају центре у средиштима страница квадрата и додирују полукругове. Одредити површину осенченог дела.



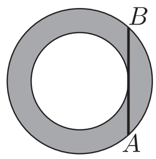
А) $4(3-2\sqrt{2})\pi$ **Б)** $\sqrt{2}\pi$ **В)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi$ **Г)** π **Д)** $\dfrac{1}{4}\pi$

Задаци који вреде 4 поена

11. Бројеви $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{7}$ су узастопни чланови геометријског низа. Који је следећи члан тог низа?

А) $\sqrt[9]{7}$ **Б)** $\sqrt[12]{7}$ **В)** $\sqrt[5]{7}$ **Г)** $\sqrt[10]{7}$ **Д)** 1

12. Тетива AB је тангента на мањи од концентричних кругова на слици. Одредити површину осенченог дела ако је $AB = 16$.

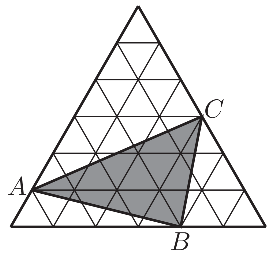


А) 32π **Б)** 63π
В) 64π **Г)** $32\pi^2$ **Д)** зависи од полупречника кругова

13. За целе бројеве x и y важи $2x = 5y$. Збир $x + y$ може имати само једну од датих вредности. Коју?

А) 2011 **Б)** 2010 **В)** 2009 **Г)** 2008 **Д)** 2007

14. Највећи једнакостранични троугао на слици састоји се од 36 мањих једнакостраничних троуглова површине $1\,\mathrm{cm}^2$. Одредити површину $\triangle ABC$.

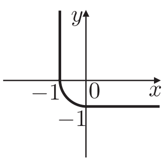


А) $11\,\mathrm{cm}^2$ **Б)** $12\,\mathrm{cm}^2$ **В)** $15\,\mathrm{cm}^2$
Г) $9\,\mathrm{cm}^2$ **Д)** $10\,\mathrm{cm}^2$

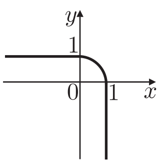
15. У кутији су плаве, зелене и црвене куглице (најмање једна сваке боје). Знамо да ако насумично извучемо пет куглица, међу њима ће сигурно бити најмање две црвене и најмање три ће бити исте боје. Колико има плавих куглица у кутији.

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** немогуће је одредити без додатних информација

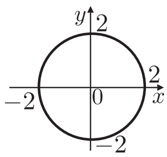
16. Који од следећих графика представља скуп решења једначине $(x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 4$?



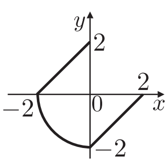
А)



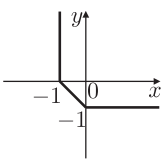
Б)



В)



Г)



Д)

17. Колико правоуглих троуглова може бити формирано спајањем по три темена правилног четрнаестоугла?

А) 42 **Б)** 84 **В)** 88 **Г)** 98 **Д)** 168

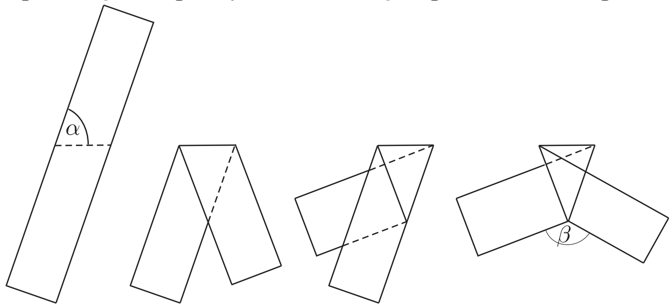
18. Свака звезда у изразу $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ се замењује или са „$+$“ или са „$\cdot$“. Нека је N највећа могућа вредност израза која се може добити на овај начин. Који је најмањи прост чинилац броја N?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** 7 **Д)** други број

19. Дужине страница троугла су природни бројеви 13, x и y. Одредити обим тог троугла ако је $xy = 105$.

А) 35 **Б)** 39 **В)** 51 **Г)** 69 **Д)** 119

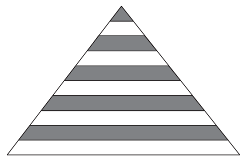
20. Папирна трака је пресавијена три пута као што је приказано. Одредити β ако је $\alpha = 70°$.



А) $140°$ **Б)** $130°$ **В)** $120°$ **Г)** $110°$ **Д)** $100°$

Задаци који вреде 5 поена

21. Праве паралелне са једном страницом троугла деле друге две странице троугла на по 10 једнаких сегмената (видети слику). Који проценат површине троугла заузима осенчени део?



А) $42,5\%$ **Б)** 45% **В)** 46% **Г)** $47,5\%$ **Д)** 50%

22. У трци је учествовало 100 људи и сви су стигли на циљ у различито време. Свако од њих је на питање који је по реду стигао на циљ као одговор дао неки број из скупа $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Збир свих одговора је 4000. Који је најмањи могући број погрешних одговора које су тркачи дали?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12 **Д)** 13

23. Бацамо коцкицу три пута. Ако је број добијен у трећем бацању једнак збиру бројева добијених у прва два, колика је вероватноћа да се број 2 добије бар једном?

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{91}{216}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{8}{15}$ **Д)** $\frac{7}{12}$

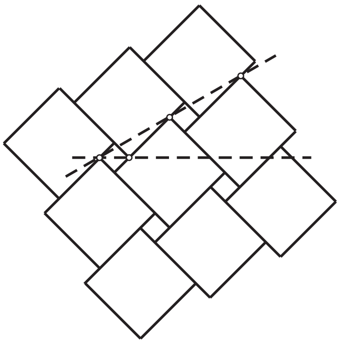
24. Бар-код се састоји од наизменично распоређених црних и белих трака, при чему увек почиње и завршава се црном траком (види слику). Свака трака (и црне и беле боје) има ширину 1 или 2, а укупна ширина бар-кода је 12. Колико је различитих бар-кодова могуће направити ако се они увек читају слева на десно?

А) 24 **Б)** 132 **В)** 66 **Г)** 12 **Д)** 116

25. На табли су 10 пута исписани сви природни бројеви од 1 до 10. Ученици играју следећу игру: један ученик брише два броја и уместо њих на табли исписује њихов збир умањен за 1, затим други ученик брише два броја и уместо њих на табли исписује њихов збир умањен за 1, итд. Игра се наставља све док на табли не остане исписан само један број. Број који је остао на табли је:

А) мањи од 440 **Б)** 451 **В)** 460 **Г)** 488 **Д)** већи од 500

26. Зид је прекривен квадратним плочицама две различите величине као на слици. Дужина ивице веће плочице ја a, а мање b. Испрекидане линије (хоризонтална и искошена) формирају угао од 30°. Одредити однос $a : b$.



А) $(2 \cdot \sqrt{3}) : 1$ **Б)** $(2 + \sqrt{3}) : 1$ **В)** $(3 + \sqrt{2}) : 1$ **Г)** $(3 \cdot \sqrt{2}) : 1$ **Д)** $2 : 1$

27. Вредност израза

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

је:

А) 2^{2048} **Б)** 2^{4096} **В)** 3^{2048} **Г)** 3^{4096} **Д)** $2^{2048}+3^{2048}$

28. Квадратни корен $\sqrt{0,444\ldots4\ldots}$ записан је као децимални број са бесконачно много децимала. Која цифра се налази на 100. позицији иза децималне запете.

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 6

29. Ако је функција $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x > 0$ важи $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$, одредити $f(6)$.

А) 993 **Б)** 1 **В)** 2009 **Г)** 1013 **Д)** 923

30. Тачке P и Q су изабране на различитим катетама правоуглог троугла. Дужине катета су a и b. Нека су K и H подножја нормала из P и Q редом на хипотенузу. Која је најмања могућа вредност збира $KP + PQ + QH$?

А) $a+b$ **Б)** $\frac{2ab}{a+b}$ **В)** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **Г)** $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **Д)** $\frac{(a+b)^2}{2ab}$

Задаци: "Kangaroo Meeting 2009", Минск, Белорусија
Организатор такмичења: Друштво математичара Србије
Превод: др Марија Станић
Рецензент: проф. др Зоран Каделбург
E-mail: `info@dms.org.rs`
URL: `http://www.dms.org.rs`