

Математичко такмичење „Кенгур без граница“ 2009.

11 – 12. разред

Задачи који вреде 3 поена

1. У акваријуму је 200 риба. Од тога 1% чине плаве рибе, а све остале су жуте. Колико жутих риба треба извадити из акваријума тако да плаве рибе представљају 2% свих риба у акваријуму?

- А) 2 Б) 4 В) 20 Г) 50 Д) 100

2. Који је од следећих бројева највећи?

- А) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ Б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ В) $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ Г) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ Д) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

3. Колико има различитих природних бројева n таквих да је број $n^2 + n$ прост?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) коначно много, али више од 2 Д) бесконачно много

4. Мара, Вања и Оља су отишле у кафић. Свака од њих купила је по три чаше сока, два сладоледа и пет колача. Који би од наведених износа могао одговарати укупном рачуну?

- А) 39,20 Б) 38,20 В) 37,20 Г) 36,20 Д) 35,20

5. Вредност израза

$$\frac{\cos 1^\circ}{\sin 89^\circ} \cdot \frac{\cos 2^\circ}{\sin 88^\circ} \cdot \frac{\cos 3^\circ}{\sin 87^\circ} \cdot \dots \cdot \frac{\cos 89^\circ}{\sin 1^\circ}$$

једнака је:

- А) 0 Б) $\sqrt{3}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Д) 1

6. Кружнице $\mathcal{F}(F, 13)$ и $\mathcal{G}(G, 15)$ се секу у тачкама P и Q . Дужина дужи PQ је 24. Који од следећих бројева може представљати дужину дужи FG ?

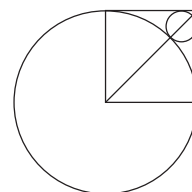
- А) 2 Б) 5 В) 9 Г) 14 Д) 18

7. У кутији су 2 беле, 3 црвене и 4 плаве сокне. Лела зна да је трећина сокни поцепана, али не зна које су боје поцепане сокне. Она случајним избором из кутије вади сокне надајући се да ће извући две читаве сокне исте боје. Колико сокни Лела мора да извуче из кутије да би била апсолутно сигурна да је извукла добар пар?

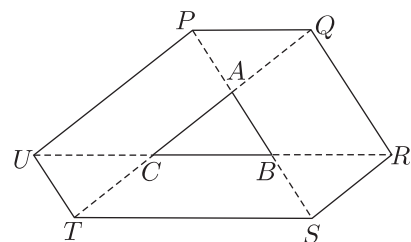
- А) 2 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) 8

8. Страница квадрата на слици је дужине 1. Тада је полупречник малог круга једнак:

- А) $\sqrt{2} - 1$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
Г) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ Д) $(1 - \sqrt{2})^2$



9. Странице троугла ABC продужene су на обе стране до тачака P, Q, R, S, T и U , тако да је $|PA| = |AB| = |BS|$, $|TC| = |CA| = |AQ|$ и $|UC| = |CB| = |BR|$. Ако је површина троугла ABC једнака 1, колика је површина шестоугла $PQRSTU$?



- А) 9 Б) 10
В) 12 Г) 13 Д) нема довољно података

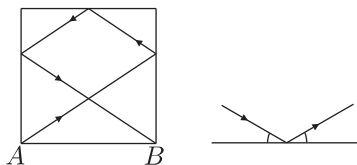
10. Желимо да обојимо квадрате у мрежи помоћу боја A, B, C и D тако да суседни квадрати нису исте боје (квадрати су суседни ако имају заједничко теме). Неки од квадрата су обојени као што је приказано на слици. Које су могућности за осенчени квадрат?

A	B			
C	D			
		B		
B				

- А) или A или B Б) само C
В) само D Г) или C или D Д) било која од A, B, C, D

Загацки који вреде 4 поена

11. На билијарској табли облика квадрата, странице дужине 2 m, кугла је избачена из темена A . Након што је ударила у три странице, као што је приказано на слици, кугла је отишла у теме B . Колико метара је кугла прешла? (Кугла се одбија од странице под истим углом под којим и удара у њу - видети слику десно).

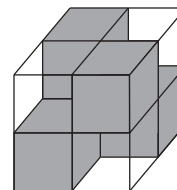


- А) 7 Б) $2\sqrt{13}$ В) 8 Г) $4\sqrt{3}$ Д) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

12. 2009 кенгура од којих је сваки или светле или тамне боје пореде своје висине. Познато је да је један светли кенгур виши од тачно 8 тамних кенгура, један светли кенгур виши од тачно 9 тамних кенгура, један светли кенгур виши од тачно 10 тамних кенгура итд. и један светли кенгур виши од свих тамних кенгура. Колико има светлих кенгура?

- А) 1000 Б) 1001 В) 1002 Г) 1003 Д) ситуација није могућа

13. Коцка димензије $2 \times 2 \times 2$ формирана је од четири беле провидне коцке димензија $1 \times 1 \times 1$ и четири црне непровидне коцке димензија $1 \times 1 \times 1$ (види слику). Оне су распоређене тако да је цела велика коцка непровидна, тј. да није могуће видети кроз њу ни од врха ка дну, ни од напред ка позади, ни слева на десно. Колико најмање црних непровидних коцки димензија $1 \times 1 \times 1$ треба ставити у велику коцку димензије $3 \times 3 \times 3$ да би она цела била непровидна.



- А) 6 Б) 9 В) 10 Г) 12 Д) 18

14. Нека је Z број осмоцифрених бројева код којих су све цифре различите и који не садрже цифру 0. Колико има осмоцифрених бројева дељивих са 9 код којих су све цифре различите и који не садрже цифру 0?

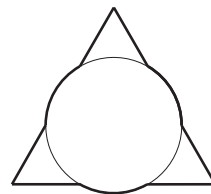
- А) $\frac{Z}{8}$ Б) $\frac{Z}{3}$ В) $\frac{Z}{9}$ Г) $\frac{8Z}{9}$ Д) $\frac{7Z}{8}$

15. Која је последња цифра броја $1^2 - 2^2 + \dots - 2008^2 + 2009^2$?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

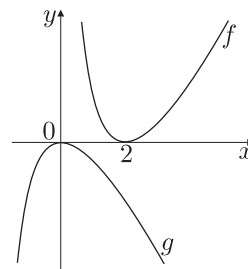
16. Једнакостранични троугао стране дужине 3 прекривен је кругом полупречника 1, тако да се центри те две фигуре поклапају. Колики је обим добијене фигуре?

- А) $3 + 2\pi$ Б) $6 + \pi$ В) $9 + \frac{\pi}{3}$ Г) 3π Д) $9 + \pi$



17. Графици реалних функција f и g приказани су на слици. У каквом су односу f и g ?

- А) $g(x) = f(x + 2)$
 Б) $g(x - 2) = -f(x)$
 В) $g(x) = -f(-x + 2)$
 Г) $g(-x) = f(-x + 2)$
 Д) $g(2 - x) = -f(x)$



18. На математичкој олимпијади 100 ученика је решавало 4 задатка. 90 такмичара је решило први задатак, 85 такмичара је решило други задатак, 80 такмичара је решило трећи и 70 такмичара је решило четврти задатак. Који је најмањи могући број ученика који су решили сва четири задатка?

- А) 10 Б) 15 В) 20 Г) 25 Д) 30

19. Који је највећи природан број n такав да је производ $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11\dots1}_{24 \text{ цифре}}$ дељив са 3^n ?

- А) 20 Б) 15 В) 12 Г) 10 Д) 8

20. У поља квадрата димензија 3×3 треба уписати реалне бројеви тако да је збир у свим врстама, колонама и дијагоналама исти. Два броја су уписана као на слици. Колико је a ?

- А) 16 Б) 51 В) 54 Г) 55 Д) 110

a		
		47
	63	

Задаци који вреде 5 поена

21. Тркачи A и B трче око стадиона у истом смеру. И један и други све време трче константном брзином. A трчи брже од B и тркачу A је потребно 3 min за један круг. Тркачи A и B су кренули у исто време и 8 min касније A је први пут стигао тркача B . Колико времена је тркачу B потребно за један круг?

- А) 6 min Б) 8 min В) 4 min 30 s Г) 4 min 48 s Д) 4 min 20 s

22. Коју вредност има израз $\frac{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2009}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2009}}}$?

- А) 1 Б) 2 В) 2^{2008} Г) 2^{2009} Д) 2^{2010}

23. Колико има десетоцифрених бројева написаних цифрама 1, 2 и 3, код којих се сваке две суседне цифре разликују за 1? (Не морају се обавезно употребити све три дате цифре.)

- А) 16 Б) 32 В) 64 Г) 80 Д) 100

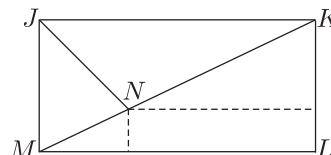
24. За колико природних бројева $n \geq 3$ постоји конвексан n -тоугао чији су углови у односу $1 : 2 : \dots : n$?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 5 Д) више од 5

25. На математичкој олимпијади учествовало је 55 такмичара. У току прегледања задатака комисија је означавала са '+' када је задатак решен, са '-' када задатак није решен и са '0' када такмичар није радио задатак. Касније се испоставило да не постоје два рада са истим бројем '+' и '-'. Који је најмањи могући број задатака на олимпијади?

- А) 6 Б) 9 В) 10 Г) 11 Д) 12

26. У правоугаонику $JKLM$, симетрала угла KJM сече дијагоналу KM у тачки N . Растојања од тачке N до страница LM и KL су 1 и 8 респективно. Колика је дужина странице LM ?



- А) $8 + 2\sqrt{2}$ Б) $11 - 2\sqrt{2}$ В) 10
 Г) $8 + 3\sqrt{2}$ Д) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Ако је $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, колико различитих вредности може имати k ?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 6

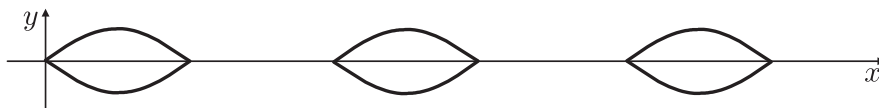
28. Бројеви $1, 2, 3, \dots, 99$ су распоређени у n група под следећим условима:

- сваки број је у тачно једној групи;
- у свакој групи су најмање два броја;
- ако се два броја налазе у истој групи, онда њихов збир није дељив са 3.

Најмање n са овим особинама је:

- А) 3 Б) 9 В) 33 Г) 34 Д) 66

29. Који од следећи израза може бити једначина криве чији је део приказан на слици?



- А) $y = \sin x$ Б) $|y| = \sin x$
 В) $|y| = |\sin x|$ Г) $y = |\sin x|$ Д) ниједан од понуђених

30. Низ целих бројева a_n дефинисан је на следећи начин: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ за $n \geq 0$. Остатак при дељењу a_{2009} са 7 је:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 5 Д) 6

Задаци: "Kangaroo Meeting 2008", Берлин, Немачка
 Организатор такмичења: Друштво математичара Србије
 Превод: др Марија Станић
 Рецензент: проф. др Зоран Каделбург
 E-mail: info@dms.org.rs
 URL: <http://www.dms.org.rs>