Друштво математичара Србије
Републички семинар 2017.
Београд, 11.-12. фебруар

Аутор и реализатор радионице:
др Ђорђе Баралић, Математички Институт САНУ, Београд
e-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

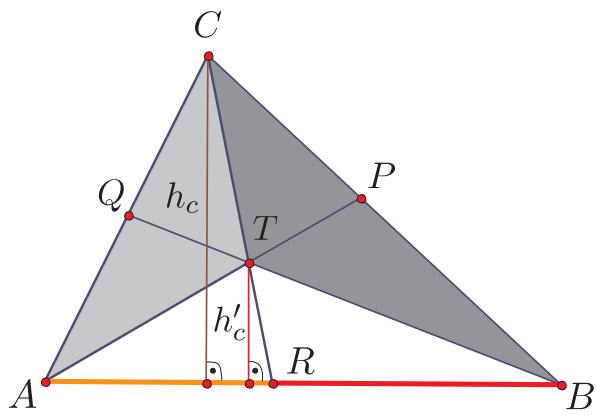
Ово предавање је део пројектних активности пројекта **Примјена динамичког софтвера Cinderella у научно-техничким истражива-њима, математици и образовању** које подржава Министарство науке и технологије Републике Српске.

0.1 Чевина теорема

Теорема 0.1 (Чевина теорема)**.** *Нека су P, Q и R тачке правих одређених ивицама BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$. Праве AP, BQ и CR секу се у једној тачки ако и само ако је:*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Доказ. Нека се праве AP, BQ и CR секу у тачки T. Нека су h_c и h'_c дужине нормала из тачака C и T редом на праву AB. Имамо да је $P_{\triangle ACR} = \frac{AR \cdot h_c}{2}$, $P_{\triangle BCR} = \frac{BR \cdot h_c}{2}$, $P_{\triangle ATR} = \frac{AR \cdot h'_c}{2}$ и $P_{\triangle BTR} = \frac{BR \cdot h'_c}{2}$.



Одавде налазимо да су површине $P_{\triangle CAT} = P_{\triangle ACR} - P_{\triangle ATR} = \frac{AR \cdot (h_c - h'_c)}{2}$ и $P_{\triangle BCT} = P_{\triangle BCR} - P_{\triangle BTR} = \frac{BR \cdot (h_c - h'_c)}{2}$.

Лако се налази да је

$$\frac{P_{\triangle CAT}}{P_{\triangle BCT}} = \frac{\frac{AR \cdot (h_c - h'_c)}{2}}{\frac{BR \cdot (h_c - h'_c)}{2}} = \frac{AR}{BR} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$$

јер су вектори $\overrightarrow{AR}$ и $\overrightarrow{RB}$ истог смера и њихов однос је једнак односу дужи AR и BR.

Аналогно се доказује да је

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{P_{\triangle ABT}}{P_{\triangle CAT}} \qquad \text{и} \qquad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{P_{\triangle BCT}}{P_{\triangle ABT}}.$$

Множећи ове три једнакости добијамо

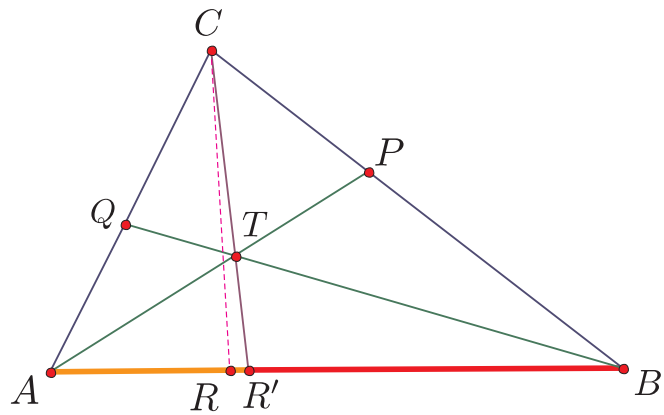
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{P_{\triangle ABT}}{P_{\triangle CAT}} \cdot \frac{P_{\triangle BCT}}{P_{\triangle ABT}} \cdot \frac{P_{\triangle CAT}}{P_{\triangle BCT}} = 1.$$

Остаје да покажемо део само ако тј. ако су тачке P, Q и R на страницама BC, CA и AB такве да је

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$$

да се онда праве AP, BQ и CR секу у једној тачки.

Нека се праве AP и BQ секу у једној тачки T и нека права CT сече страницу AB у тачки R'. Тада су тачке P, Q и R' на страницама BC, CA и AB такве да се праве AP, BQ и CR' секу у једној тачки T, па је према горе доказаном делу



$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = 1.$$

Из ове две једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}$, одакле је $R \equiv R'$ јер не могу постојати две различите тачке на правој AB које ће делити дуж AB у истом односу. Овим је тврђење доказано у потпуности, јер се праве AP, BQ и CR (CR') секу у тачки T.

0.2 Менелајева теорема

Теорема 0.2 (Менелајева теорема)**.** *Нека су P, Q и R тачке правих одређених ивицама BC, CA и AB троугла ABC. Тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је:*

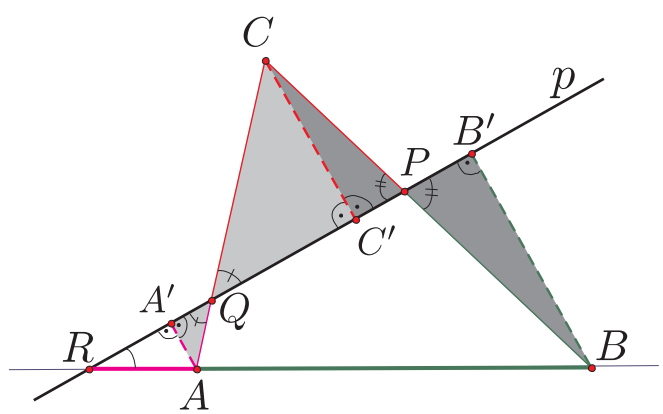
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Доказ. Нека је p права која пролази кроз тачке P, Q и R и нека су A', B' и C' подножја нормала из тачака A, B и C на праву p. Имамо да је $\triangle BB'P \sim \triangle CC'P$ јер имају по један прав угао, а $\angle BPB' = \angle CPC'$ као унакрсни углови. Одавде је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{BP}{CP} = \frac{BB'}{CC'}$. Аналогно, доказујемо да је $\triangle CQC' \sim \triangle AQA'$ и $\triangle ARA' \sim \triangle BRB'$. Одавде је $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{CQ}{AQ} = \frac{CC'}{AA'}$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{AR}{BR} = -\frac{AA'}{BB'}$ (знак $-$ јер вектори AR и BR нису истог смера).

Множећи ове три једнакости добијамо

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} =$$

$$\left(\frac{BB'}{CC'}\right) \cdot \left(\frac{CC'}{AA'}\right) \cdot \left(-\frac{AA'}{BB'}\right) = -1.$$



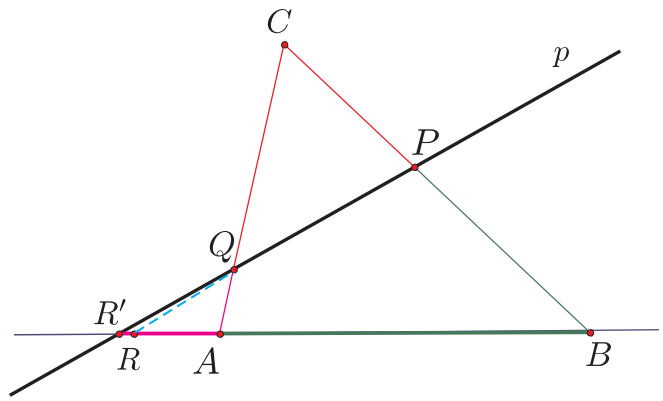
Остаје да покажемо део само ако тј. ако су тачке P, Q и R на страницама BC, CA и AB такве да је

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

да онда тачке P, Q и R леже на једној правој.

Нека је p права кроз тачке P и Q, и нека се праве p и AB секу у тачки R'. Тада су тачке P, Q и R' на страницама BC, CA и AB такве да су тачке P, Q и R' колинеарне. На основу претходно доказаног дела важи

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1.$$



Из ове две једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}$, одакле је $R \equiv R'$ јер не могу постојати две различите тачке на правој AB које ће делити дуж AB у истом односу. Овим је тврђење доказано у потпуности, јер тачке P, Q и R (R') припадају правој p. □

0.3 Папосова Теорема

Теорема 0.3 (Папосова теорема)**.** *Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 тројке колинеарних тачака у равни које нису све на истој правој. Праве AB_1 и BA_1 секу се у P, BC_1 и CB_1 у Q, CA_1 и AC_1 у R. Тада су тачке P, Q и R колинеарне.*

Доказ. Нека је M пресечна тачка правих AC_1 и BA_1, N пресечна тачка правих AC_1 и CB_1 и L пресечна тачка правих CB_1 и BA_1. Применићемо Менелајеву теорему на троугао $\triangle LMN$. За тачке C, R и A_1 добијамо

$$\frac{MR}{RN} \cdot \frac{NC}{CL} \cdot \frac{LA_1}{A_1M} = -1. \tag{1}$$

За тачке P, A и B_1 које такође леже на једној правој добијамо

$$\frac{LP}{PM} \cdot \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB_1}{B_1L} = -1. \tag{2}$$

За праву која садржи тачке Q, B и C_1 добијамо

$$\frac{NQ}{QL} \cdot \frac{LB}{BM} \cdot \frac{MC_1}{C_1N} = -1. \tag{3}$$

За праву која садржи тачке A, B и C добијамо

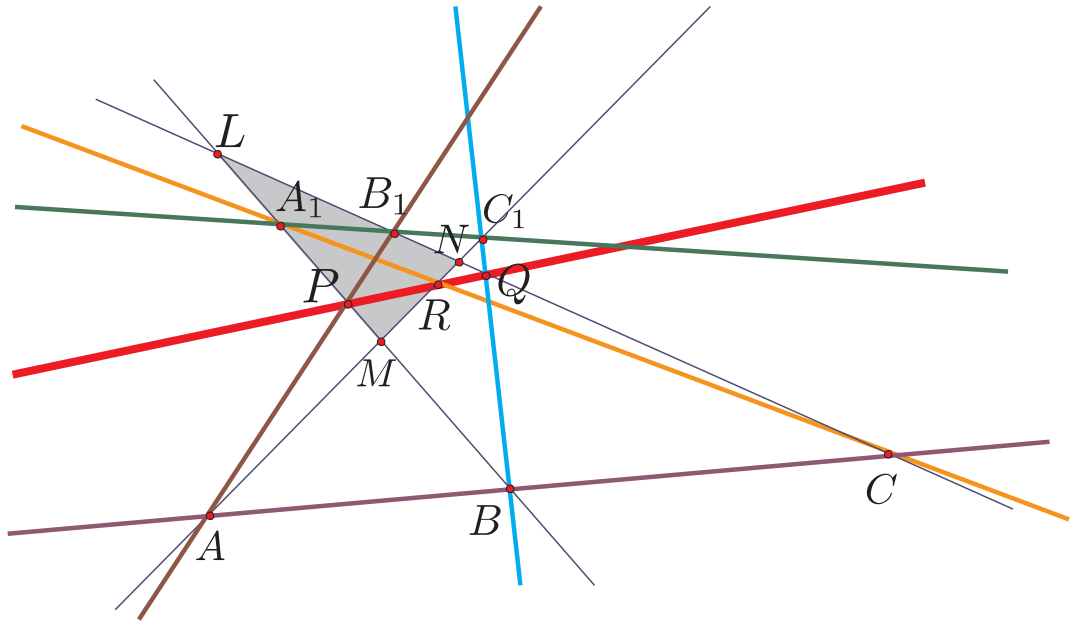
$$\frac{NC}{CL} \cdot \frac{LB}{BM} \cdot \frac{MA}{AN} = -1. \tag{4}$$

За праву која садржи тачке A_1, B_1 и C_1 добијамо

$$\frac{LA_1}{A_1M} \cdot \frac{MC_1}{C_1N} \cdot \frac{NB_1}{B_1L} = -1. \tag{5}$$

Помножимо сада релације (1), (2) и (3) и добијамо

$$\frac{MR}{RN} \cdot \frac{NC}{CL} \cdot \frac{LA_1}{A_1M} \cdot \frac{LP}{PM} \cdot \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB_1}{B_1L} \cdot \frac{NQ}{QL} \cdot \frac{LB}{BM} \cdot \frac{MC_1}{C_1N} = -1,$$



Слика 1: Папосова теорема

односно

$$\frac{LP}{PM}\cdot\frac{MR}{RN}\cdot\frac{NQ}{QL}\cdot\frac{NC}{CL}\cdot\frac{LB}{BM}\cdot\frac{MA}{AN}\cdot\frac{LA_1}{A_1M}\cdot\frac{MC_1}{C_1N}\cdot\frac{NB_1}{B_1L}=-1.$$

Сада искористимо релације (4) и (5) и добијамо

$$\frac{LP}{PM}\cdot\frac{MR}{RN}\cdot\frac{NQ}{QL}=-1.$$

Одавде на основу Менелајеве теореме примењене на троугао $\triangle LMN$ и тачке P, Q и R следи да су тачке P, Q и R колинеарне. □

0.4 Паскалова теорема

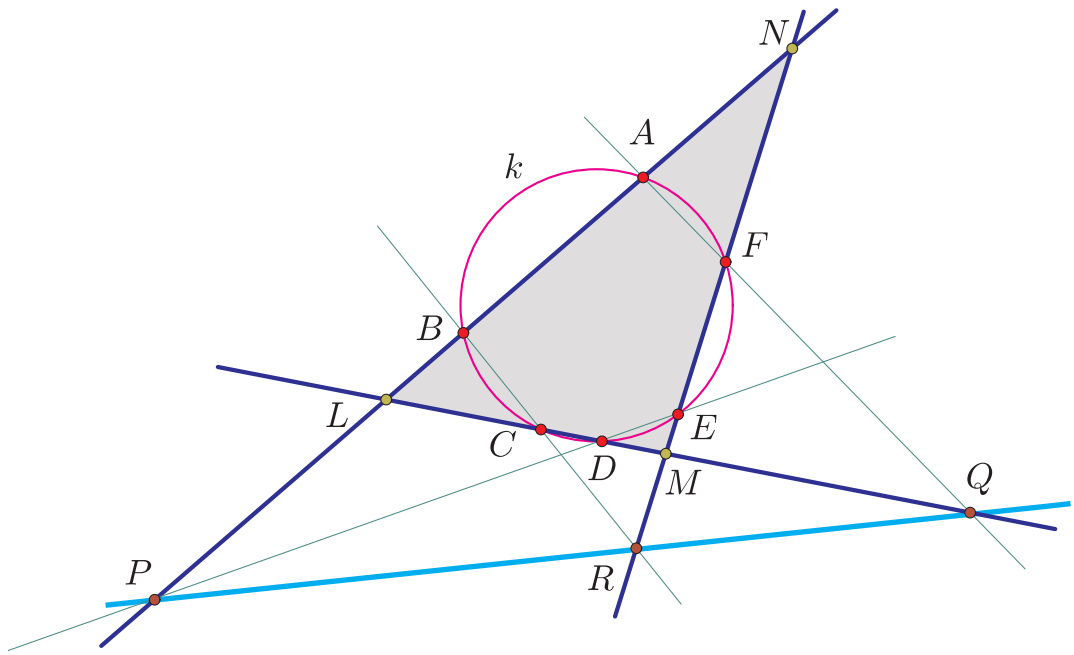
Теорема 0.4 (Паскалова теорема)**.** *Нека је $ABCDEF$ шестоугао уписан у круг k. Праве AB и DE секу се у тачки P, праве BC и EF у тачки Q и праве CD и FA у тачки R. Тада су тачке P, Q и R колинеарне.*

Доказ. Нека је $L = p(AB)\cap p(CD)$, $M = p(CD)\cap p(EF)$ и $N = p(EF)\cap p(AB)$, Слика 2. Применимо Менелајеву теорему на троугао $\triangle LMN$ и праве BC, DE и AF редом и добијамо:

$$\frac{\overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{BM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QL}}=-1, \tag{1}$$

$$\frac{\overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{DN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NE}}{\overrightarrow{EL}}\cdot\frac{\overrightarrow{LP}}{\overrightarrow{PM}}=-1, \tag{2}$$

$$\frac{\overrightarrow{LA}}{\overrightarrow{AM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{RN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{FL}}=-1. \tag{3}$$



Слика 2: Паскалова теорема

Множењем једнакости (1), (2) и (3) добијамо

$$\frac{\overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{BM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{DN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NE}}{\overrightarrow{EL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LP}}{\overrightarrow{PM}} \cdot \frac{\overrightarrow{LA}}{\overrightarrow{AM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{RN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{FL}} = -1,$$

односно

$$\frac{\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{EL} \cdot \overrightarrow{FL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}} \cdot \frac{\overrightarrow{NF} \cdot \overrightarrow{NE}}{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LP}}{\overrightarrow{PM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{RN}} = -1. \tag{4}$$

Према потенцији тачке у односу на круг k за тачке L, M и N је $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{EL} \cdot \overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{NF} \cdot \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DN}$. Коришћењем ових једнакости у (4) следи

$$\frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LP}}{\overrightarrow{PM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{RN}} = -1,$$

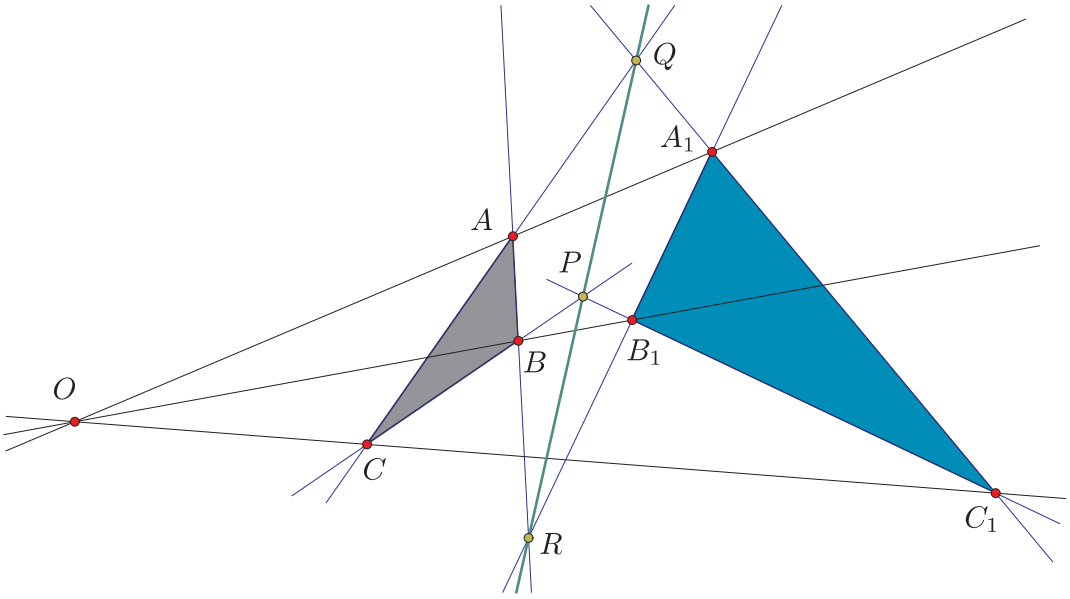
одакле по обратној Менелајевој теореми следи да су тачке P, Q и R колинеарне. □

0.5 Дезаргова теорема

Теорема 0.5 (Дезаргова теорема)**.** *Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ троуглови једне равни. Нека је P пресечна тачка правих BC и B_1C_1, Q пресечна тачка правих CA и C_1A_1 и R пресечна тачка правих AB и A_1B_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки ако и само ако су тачке P, Q и R колинеарне.*

Доказ. Прво ћемо доказати да конкурентност правих AA_1, BB_1 и CC_1 повлачи колинеарност тачака P, Q и R.

Нека се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у тачки O.



Применом Менелајеве теореме на $\triangle OCA$ и тачке A_1, C_1 и Q добијамо

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{C_1C}} = -1. \tag{1}$$

Применом Менелајеве теореме на $\triangle OBC$ и тачке C_1, B_1 и P добијамо

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{B_1B}} = -1. \tag{2}$$

Применом Менелајеве теореме на $\triangle OAB$ и тачке B_1, A_1 и R добијамо

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{A_1A}} = -1. \tag{3}$$

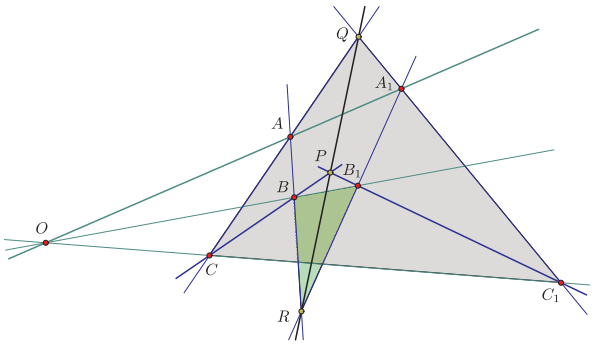
Множећи релације (1), (2) и (3) добијамо

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{A_1O} \cdot \overrightarrow{A_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1O} \cdot \overrightarrow{B_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1C} \cdot \overrightarrow{C_1O}} = -1,$$

односно

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1,$$

одакле према Менелајевој теореми за $\triangle ABC$ следи да су тачке P, Q и R колинеарне.



Остаје да покажемо да из колинеарности тачака P, Q и R следи да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

Претпоставимо да се праве BB_1 и CC_1 секу у тачки O и докажимо да су тачке O, A и A_1 колинеарне. Приметимо да су троуглови $\triangle BRB_1$

и $\triangle CQC_1$ перспективни из тачке P, јер праве BC, RQ и B_1C_1 пролазе кроз P. Зато према претходном доказаном делу важи да су тачке $A = l(BR) \cap l(CQ)$, $A_1 = (B_1R) \cap l(C_1Q$ и $O = l(BB_1) \cap l(CC_1)$, чиме је тврђење доказано. $\square$

0.6 Радикална оса два круга

Лема 0.1. *Нека су A, B, C и D тачке у равни. Праве AC и BD су нормалне ако и само ако је*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2.$$

Доказ. Докажимо прво да је услов потребан. Нека се праве AC и BD секу у тачки O и нека је $AC \perp BD$. Тада су $\triangle AOD$, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle COD$ правоугли троуглови, па на основу Питагорине теореме важи
$AB^2 + CD^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = (AO^2 + DO^2) + (CO^2 + BO^2) = BC^2 + DA^2$.

Остаје да покажемо да је услов довољан. Нека су O_1 и O_2 редом подножја нормала из B и D на праву AC и нека је $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$. На основу Питагорине теореме је

$$AB^2 + CD^2 = ({AO_2}^2 + {BO_2}^2) + ({CO_1}^2 + {DO_1}^2),$$

$$BC^2 + DA^2 = ({BO_2}^2 + {CO_2}^2) + ({DO_1}^2 + {AO_1}^2).$$

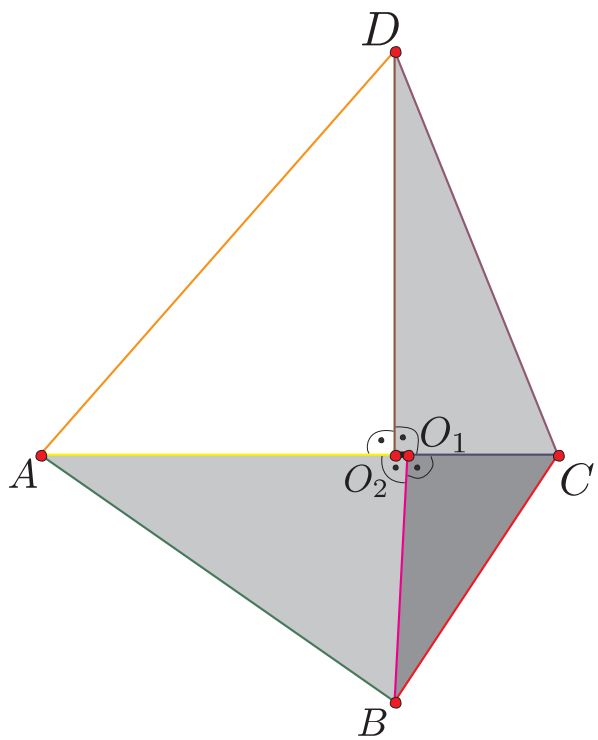
Убацивањем ових релација у дати израз добијамо

$${AO_2}^2 + {CO_1}^2 = {AO_1}^2 + {CO_2}^2.$$

Одавде је ${AO_2}^2 - {CO_2}^2 = {AO_1}^2 - {CO_1}^2$, тј. $(AO_2 + CO_2)(AO_2 - CO_2) = (AO_1 + CO_1)(AO_1 - CO_1)$. Одавде је $AC \cdot (AO_2 - CO_2) = AC \cdot (AO_1 - CO_1)$, а како је $A \not\equiv C$, то је одавде

$$AO_2 - AO_1 = CO_2 - CO_1.$$

Сада је $O_1O_2 = -O_1O_2$, па је $O_1 \equiv O_2$ и $AC \perp BD$, чиме је лема доказана.



Радикална оса две кружнице је геометријско место тачака X које имају једнаку потенцију у односу на обе кружнице, односно таквих да је

$$O_1X^2 - R_1^2 = O_2X^2 - R_2^2$$

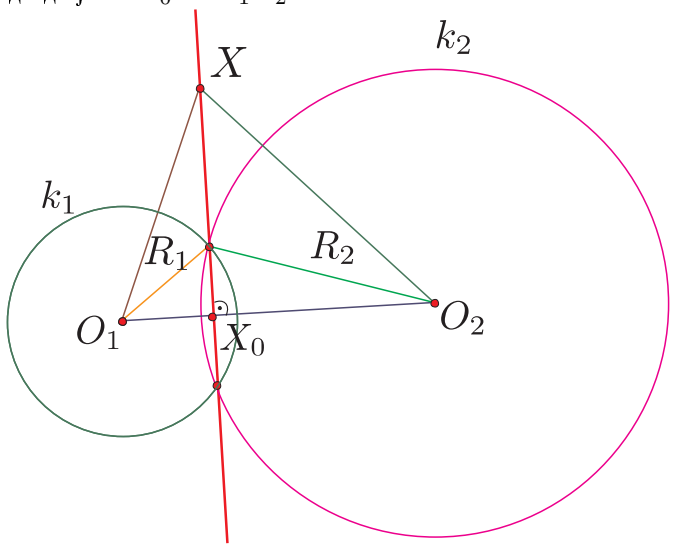
где су O_1 и O_2 центри, а R_1 и R_2 полупречници те две кружнице.

Прво ћемо доказати да тачка са оваквим својством постоји на правој O_1O_2. Заиста тачка X_0 на правој O_1O_2 таква да је $O_1X_0 = \frac{O_1O_2}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$ испуњава горњи услов. Уочимо неку другу тачку X такву да је $O_1X^2 - R_1^2 = O_2X^2 - R_2^2$.

Како је $O_1X_0{}^2 - R_1^2 = O_2X_0{}^2 - R_2^2$, следи да је

$$O_1X^2 + O_2X_0{}^2 = O_1X_0{}^2 + O_2X^2$$

, па на основу Леме 0.1 следи да је $XX_0 \perp O_1O_2$.

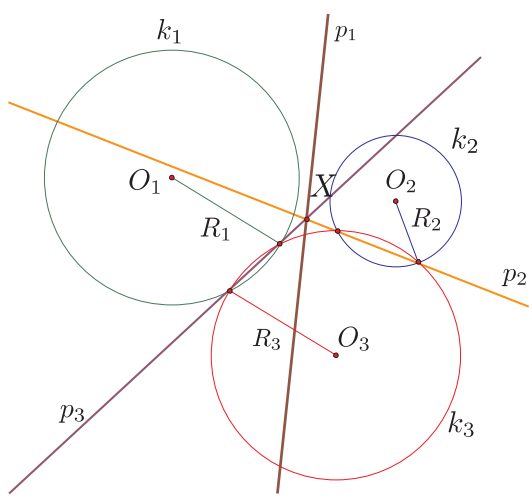


Дакле, тачке X које имају својство да имају потенцију једнаку у односу на две кружнице се налазе на правој нормалној на O_1O_2 у тачки X_0. Није тешко уверити се (коришћењем Питагорине теореме) да све тачке на тој правој имају описано својство.

Теорема 0.6 (Теорема о радикалним осама)**.** *Нека су k_1, k_2 и k_3 кругови једне равни. Нека је права p_1 радикална оса кругова k_2 и k_3 и нека су аналогно дефинисане праве p_2 и p_3. Тада се праве p_1, p_2 и p_3 секу у једној тачки.*

Нека је p_1 радикална оса кружница k_2 и k_3, p_2 радикална оса кружница k_3 и k_1, p_3 радикална оса кружница k_1 и k_2. Ако су праве p_1, p_2 и p_3 међусобно паралелне, тврђење је доказано.

Претпоставимо да се неке две секу. Нека се праве p_1 и p_2 секу у тачки X.



Из услова $X \in p_1$ следи

$$O_2X^2 - R_2^2 = O_3X^2 - R_3^2,$$

а из услова $X \in p_2$ следи

$$O_3X^2 - R_3^2 = O_1X^2 - R_1^2.$$

Одавде следи да мора бити и

$$O_1X^2 - R_1^2 = O_2X^2 - R_2^2,$$

што повлачи да тачка X има једнаке потенције у односу на кружнице k_1 и k_2, тј. припада њиховој радикалној оси p_3. Овим је доказано да се све три секу у једној тачки или су све три међусобно паралелне. $\square$

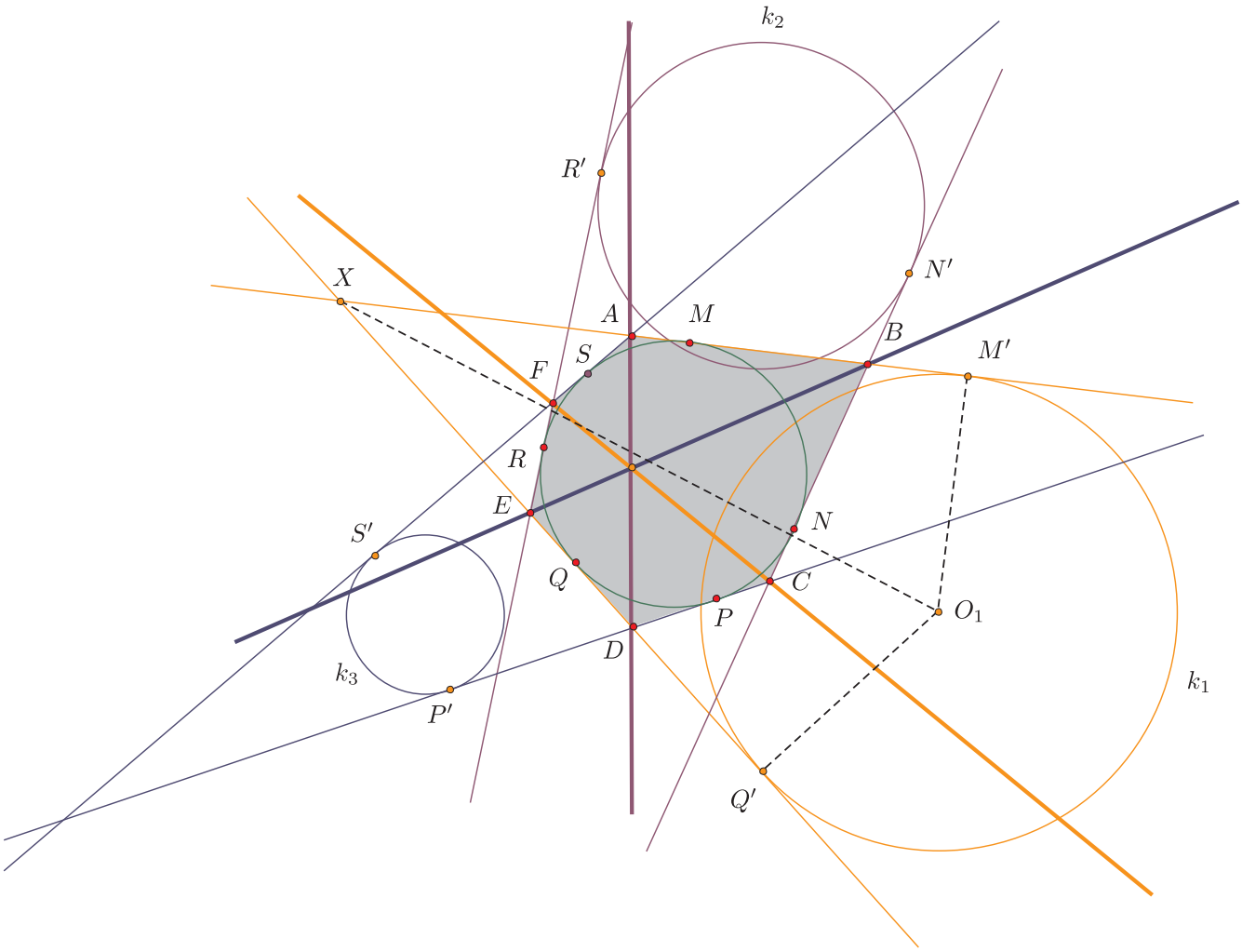
0.7 Бријаншонова теорема

Теорема 0.7 (Бријаншонова теорема)**.** *Ушестоугао $ABCDEF$ уписан је круг. Доказати да се дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.*

Доказ. Нека кружница k уписана у шестоугао $ABCDEF$ додирује странице AB, BC, CD, EF и FA редом у тачкама M, N, P, Q, R и S. На продужецима страница AB, CB, CD, ED, EF и AF као на Слици 3, уочимо тачке M', N, P', Q', R' и S' такве да је

$$MM' = NN' = PP' = QQ' = RR' = SS' = c.$$

Нека се праве AB и DE секу у тачки X и нека се нормала на AB у тачки M' и нормала на DE у тачки Q' секу у тачки O_1. Дужи $XM = XQ$ су једнаке као тангентне дужи на k, па је $XM' = XM + MM' = XP + PP' = XP'$. Сада лако следи да су правоугли троуглови XO_1M' и XO_1Q' подударни јер имају још и заједничку хипотенузу. Одавде је $O_1M' = O_1Q'$ и кружница k_1 са центром у O_1 и полупречником O_1M' додирује праве AB и DE. Уколико је $AB \parallel DE$, постојање кружнице k_1 која додирује праве AB и DE редом у M' и Q' је очигледно.



Слика 3: Бријаншонова теорема

Аналогно показујемо да постоји кружница k_2 која додирује праве BC и EF у тачкама N' и R', и k_3 која додирује праве CD и FA редом у тачкама P' и S'.

Приметимо да је потенција тачке A у односу на круг k_1 једнака $AM'^2 = (AM + MM')^2$, а у односу на k_2 једнака је $AS'^2 = (AS + SS')^2$. Како је $AS = AM$ као тангентне дужи на k и $MM' = SS'$ по конструкцији, то следи да је $AM + MM' = AS + SS'$ и тачка A има једнаке потенције у односу на кругове k_1 и k_2. Аналогно се доказује да тачка D има једнаке потенције у односу на кругове k_1 и k_2. Дакле, тачке A и D припадају радикалној оси кругова k_1 и k_2, штавише права AD је радикална оса кругова k_1 и k_2.

Аналогно се доказује да је права BE радикална оса кругова k_2 и k_3, а права CF радикална оса кругова k_3 и k_1. Према теореми о радикалним осама, сада следи да се праве AD, BE и CF секу у једној тачки. Због конвексности шестоугла $ABCDEF$ дијагонале се секу унутар шестоугла, тј. пресечна тачка правих AD, BE и CF се налази у шестоуглу, па је овим показано да се дијагонале AD, BE и CF (као дужи, а не праве) секу у једној тачки. $\square$

Задаци

1. а) Доказати да се тежишне дужи троугла секу у једној тачки.

б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова троугла секу у једној тачки.

в) Доказати да се симетрала једног унутрашњег угла и симетрале преостала два спољашња угла секу у једној тачки.

2. Нека су A_1, B_1 и C_1 редом подножја висина из темена A, B и C троугла ABC. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки, *ортоцентру* троугла.

3. Нека су D, E и F тачке у којима уписани круг троугла ABC, редом додирује странице BC, CA и AB. Доказати да се праве AD, BE и CF секу у једној тачки, *Жергоновој тачки* троугла.

4. Нека су k_1, k_2 и k_3 кругови једне равни. Спољашње заједничке тангенте кругова k_1 и k_2 секу се у P, k_2 и k_3 у Q, k_3 и k_1 у R. Доказати да су тачке P, Q и R колинеарне.

5. Тангента на описани круг троугла ABC у темену A сече праву BC у тачки A_1. Тачке B_1 и C_1 дефинишу се аналогно. Доказати да су тачке A_1, B_1, C_1 колинеарне.

6. Тангента на описани круг троугла ABC у темену A сече праву BC у тачки A_1, а тачка A_2 је средиште дужи A_1A. Тачке B_2 и C_2 дефинишу се аналогно. Доказати да су тачке A_2, B_2, C_2 колинеарне и да је права која их садржи нормална на Ојлерову праву троугла.

7. Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 тројке колинеарних тачака у равни које нису све на истој правој. Праве AB_1 и BA_1 секу се у P, BC_1 и CB_1 у Q, CA_1 и AC_1 у R. Доказати да су тачке P, Q и R колинеарне.

8. Нека је $ABCD$ тангентни четвороугао и нека уписани круг k додирује странице четвороугла AB, BC, CD и DA редом у тачкама M, N, P и Q. Доказати да се праве MP, NQ, AC и BD секу у једној тачки.

9. Нека је $ABCD$ тангентни четвороугао и нека уписани круг k додирује странице четвороугла AB, BC, CD и DA редом у тачкама M, N, P и Q. Нека праве BQ и BP секу круг k редом у тачкама E и F. Доказати да се праве ME, NF и BD секу у једној тачки.