СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Скице решења

Први дан

1. Дата једнакост је еквивалентна са $\frac{1}{a_{k-1}+a_k} = \frac{1}{a_k+a_{k+1}}$ за свако k. Индукцијом добијамо $\frac{1}{a_k+a_{k+1}} = k + \frac{1}{a_0+a_1}$, одакле следи да је $\frac{1}{a_{n-1}+a_n} > n-1$ и према томе $a_n < \frac{1}{n-1}$.

2. Нека је $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ канонска факторизација броја n. Тада је

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}(p_i - 1),$$

па како је једини прост делилац броја $\varphi(n)$ два, то је $a_i = 1$ и $p_i - 1 = 2^{b_i}$, за неке $b_i \in \mathbb{N}$ и све $1 \leqslant i \leqslant k$. Међутим, $2^{b_i}+1$ може бити прост једино уколико је b_i степен броја два, па је $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$, за неке различите $k_i \in \mathbb{N}_0$.
Посматрајмо

$$n = \prod_{i=1}^{k}(2^{2^{k_i}} + 1).$$

После множења, на десној страни једнакости добијамо сабирке облика 2^b и при томе је b нека сума бројева 2^{k_i}. Ово је управо и јединствена репрезентација броја b у систему са основом два, па су сви сабирци десне стране различити. Дакле,

$$n = 1 + \sum_{i=1}^{2^k-1} 2^{n_i}, \tag{$*$}$$

где су n_i различити природни бројеви.
Слично, из чињенице да је $\varphi(n+1)$ степен броја два, добијамо да је

$$n + 1 = 2^t \prod_{i=1}^{l}(2^{2^{l_i}} + 1),$$

где је $t \geqslant 1$ и l_i различити ненегативни цели бројеви. Како су n и $n+1$ узајамно прости, то су и сви k_i и l_j различити.
Уколико $n+1$ није степен броја два посматрањем највише цифре у бинарном запису закључујемо да је $\sum 2^{k_i} = t + \sum 2^{l_i}$. Са друге стране t је за 1 веће од суме неких 2^{k_j}. Значи, сума неких бројева 2^{k_i} једнака је $1 + \sum 2^{l_i}$. Како су сви k_i и l_j различити, па и највећа два, то је $1 + \sum 2^{l_i} = 2^l$, односно $\{l_1, l_2, \ldots, l_l\} = \{0, 1, \ldots, l-1\}$.
Међутим, уколико је $t \geqslant 2$ у $(*)$ мора постојати 2^1, па самим тим 3 дели и n и $n+1$, што је очигледно немогуће. Уколико је $t = 1$, тада је $\sum 2^{k_i} = 1 + \sum 2^{l_i} = 2^l$, па је $n = 2^{2^l} + 1$. Са друге стране је $n + 1 = 2\prod_{i=0}^{l-1}(2^{2^i} + 1)$, па је очигледно $l = 1$, односно $n = 2^2 + 1 = 5$. Овим је доказ у потпуности завршен.

3. Најпре приметимо да се тачке K и L обе истовремено налазе на дужима BE и AD, редом, или су обе на правама BE и AD, али ван дужи BE и AD, све у зависности од тога да ли је тачка O у унутрашњости четвороугла $ABDE$ или ван ње. Претпоставимо да су тачке K и L на дужима BE и AD, а у другом случају, доказ би се изводио аналогно, водећи рачуна о распореду тачака.

Докажимо најпре, да је $BK : KE = AL : LD$ и да тачка X припада висини из C троугла $\triangle ABC$. Из познатог тврђења следи да је растојање тачке O од странице BC једнако половини дужине дужи AH, а растојање тачке O од AC једнако је половини дужине дужи BH. Како је $\triangle AHE \sim \triangle HBD$, па је $AE \cdot BH = BD \cdot AH$, закључујемо да је површина $\triangle AOE$ (што је због поменутог трврђења једнако $\frac{1}{4}AE \cdot BH$) једнака површини $\triangle BOD$ (која је једнака $\frac{1}{4}BD \cdot AH$). Изражавајући површину на другачији начин, добијамо $AE \cdot EO \cdot \sin\angle AEO = BD \cdot OD \cdot \sin\angle ODB$. Користећи синусну теорему на троуглове $\triangle KBD$ и $\triangle KDE$ добијемо: $\frac{BK}{KE} = \frac{BD \sin\angle ODB}{ED \sin\angle EDO}$. Аналогно је и $\frac{AL}{LD} = \frac{AE \sin\angle AEO}{ED \sin\angle OED}$. Како из $\triangle EOD$ следи $\frac{EO}{OD} = \frac{\sin\angle OED}{\sin\angle ODE}$, то заједно са наведеним једнакостима и раније доказаном једнако71у: $AE \cdot EO \cdot \sin\angle AEO = BD \cdot OD \cdot \sin\angle ODB$, даје жељену једнакост $BK : KE = AL : LD$.

Нека је E' друга пресечна тачка круга k_1 описаног око троугла $\triangle EHL$ и странице AC, а D' друга пресечна тачка круга k_2, описаног око троугла $\triangle HKD$ (могуће је да се E и E' или D и D' поклапају, тада само у наредним редовима уместо E' треба да стоји E, односно уместо D', стајаће D). Потенција тачке A у односу на круг k_1 једнака је $AH \cdot AL = AE \cdot AE'$, а потенција тачке B у односу на круг k_2 је $BK \cdot BH = BD \cdot BD'$. Како је $BK : KE = AL : LD$, односно $BK : BE = AL : AD$, добијамо: $\frac{AE'}{BD'} = \frac{AH \cdot AL}{AE} \cdot \frac{BD}{BK \cdot BH} = \frac{AL}{BK} \cdot \frac{BD}{AE} \cdot \frac{AH}{BH}$. Пошто је $\frac{BD}{AE} = \frac{BH}{AH}$, из сличности троугла $\triangle AHE \sim \triangle BHD$, а $\frac{AL}{BK} = \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$, због сличности троугла $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, следи $\frac{AE'}{BD'} = \frac{AC}{BC}$, односно $E'D' || AB$. Пошто је $\angle HEE' = 90^o$, центар O_1 круга k_1 је на средини дужи HE'. Аналогно, центар O_2 круга k_2 је на средини дужи HD'. Како је $O_1O_2 \perp HX$, а $O_1O_2 || E'D'$ због особине средње линије, следи $O_1O_2 || AB$, па и $HX \perp AB$, што је и требало доказати.

Вратимо се сада на задатак. Покажимо да су обе чињенице: колинеарност тачака K, L и M и то да је X центар описаног круга троугла EOD еквивалентне са чињеницом да се тачка O налази на кругу са пречником AH (односно, на кругу описаном око четвороугла $HDCE$). Ако су тачке K, L и M колинеарне, применом Менелајеве теореме на $\triangle ABH$ добијамо $\frac{BK}{KH} \cdot \frac{HL}{LA} = 1$. Но, како је $BK : KE = AL : LD$, одатле следи и $\frac{EK}{KH} \cdot \frac{HL}{LD} = 1$, што значи да права KL пролази и кроз средину дужи ED. Права KL садржи M и средину дужи ED, а то је управо симетрала дужи ED (јер је $ME = MD = \frac{1}{2}AB$). Због симетрије је $\angle HEO = \angle HDO$, односно, тачка O припада описаном кругу око $\triangle HDE$, а то је круг над пречником CH. С друге стране, ако је O на кругу над пречником CH, због једнакости углова $\angle ECH = \angle OCD = 90^o - \angle BAC$, следи да је $HODE$ једнакокраки трапез, па поново због симетрије, закључујемо да је права KL симетрала дужи ED, односно, да KL садржи тачку M. Показали смо једну жељену еквиваленцију, покажимо сада и другу.

Ако је X центар описаног круга за $\triangle EOD$ онда је $XE = XD$. По доказаном на почетку, знамо да је X на висини CH, па је X пресек симетрале дужи ED и висине CH, односно, X је средина дучи CH. Отуд је и O на кругу над пречником CH. С друге стране, ако је O на кругу над пречником CH, тада је $\angle HXL = \angle HEL = \angle HDK = \angle HXK$, па су X, K и L колинеарне. Као што смо раније видели, у овом случају следи да је KL симетрала дужи ED, а X је на висини CH, па пошто је и на симетрали дужи ED, следи да је X управо средина дучи CH, односно, да је X центар описаног круга за $\triangle EOD$. Овим смо показали и другу жељену еквиваленцију, па смо и комплетирали читав доказ.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Скице решења

Други дан

4. Доказаћемо најпре једно помоћно тврђење:

Лема: Нека је тачка H ортоцентар троугла ABC и M произвољна тачка са кружнице описане око троугла BCH. Ако је S средина дужи AM, а H' тачка симетрична тачки H у односу на S, тада је H' на кружници описаној око троугла ABC.

Доказ: Позната је чињеница да су кругови описани око троуглова ABC и BCH симетрични у односу на праву BC, као и то да је $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO_1}$, где је O_1 центар круга описаног око троугла BCH. Другим речима, круг описан око троугла BCH добија се транслацијом круга описаног око троугла ABC за вектор $\overrightarrow{AH}$. Због конструкције тачке H' важи $\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{AH} =$ (четвороугао $AHMH'$ је паралелограм), а како је M на кругу око троугла BCH, следи да је H' на кругу око троугла ABC.

Вратимо се сада на задатак. Доказаћемо да се тачке O_1 и O_2 налазе на кругу ω, описаном око троугла XYM. Нека је N друга пресечна тачка круга ω и праве AB (уколико ω додирује праву AB, у наредном тексту свуда где пише N, треба заменити са M). Претпоставимо да је распоред тачака на правој AB: $A - M - N - B$. При било ком другом распореду, доказ се изводи аналогно. четвороугао $MNYX$ је тетиван, па је зато $\measuredangle NYX = \measuredangle AMX = \measuredangle BAC$ и $\measuredangle YXN = \measuredangle YMN = \measuredangle ABC$, као и $\measuredangle XNY = \measuredangle ACB$. Из једнакости углова, следи да је $\triangle ABC \sim \triangle XYN$. Круг описан око троугла ANX подударан је са ω, јер тетиви XN у оба круга одговара једнак периферијски угао, па су ова два круга симетрична у односу на праву XN. Аналогно важи и за круг описан око троугла BNY, који је симетричан са ω у односу на праву NY, као и за круг описан око троугла XYC и праву XY. Као што је познато, ова три круга секу се управо у ортоцентру троугла NYX, нека је то тачка H. Сада је $\measuredangle AHB = \measuredangle AHN + \measuredangle NHB = \measuredangle AXN + \measuredangle NYB = (180^o - \measuredangle BAC - \measuredangle ANX) + (180^o - \measuredangle ABC - \measuredangle YNB) = \measuredangle ACB + \measuredangle XNY = 2 \cdot \measuredangle ACB$. Аналогно, доказујемо и $\measuredangle BHC = 2 \cdot \measuredangle BAC$ и $\measuredangle AHC = 2 \cdot \measuredangle ABC$. Тачка из које се свака страница троугла види под углом двоструко већим од угла под којим се та страница види из наспрамног темена је управо центар описане кружнице тог троугла. Због тога је $H \equiv O$. Ако сада посматрамо троугао XYN, тачка O је његов ортоцентар, а тачка A је на кружници описаној око троугла XON, па по доказаној леми, O_1 заиста припада кругу ω. Аналогно је и O_2 на кругу ω, па су тачке X, Y, O_1 и O_2 концикличне.

5. Доказаћемо да бројеви a, b и c са наведеним особинама постоје. Посматрајмо број $x = (a + \sqrt{b})^c + (a - \sqrt{b})^c$. Покушајмо да одаберемо бројеве a и b тако да број x буде дељив са 10^4 и да је $a - \sqrt{b}$ "мало" веће од 1. То можемо постићи избором $a = 10^k$ и $b = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k$, где је k довољно велики природан број. Заиста, на основу биномне формуле, ако је c_1 остатак при дељењу броја c са 2, имамо

$$x = 2(a^c + \binom{c}{2} a^{c-2} \sqrt{b}^2 + \binom{c}{4} a^{c-4} \sqrt{b}^4 + ... + \binom{c}{c - c_1} a^{c_1} \sqrt{b}^{c - c_1}),$$

те је (за $k > 3$ и $c > 2$) сваки сабирак последње суме, за назначени избор бројева a и b, дељив са 10^4, а тиме и x.

Након овога, довољно је доказати да постоје бројеви $k > 3$ и $c > 2011$ тако да важи

$$7989,7989 \geqslant (a-\sqrt{b})^c > 7989,7988. \qquad (*)$$

Како за свако $k \in \mathbb{N}$ важи $10^k - \sqrt{10^{2k} - 2\cdot 10^k} > 1$ и пошто је $\lim_{k\longrightarrow\infty}(10^k - \sqrt{10^{2k} - 2\cdot 10^k}) = 1$, то постоји природан број k такав да је $10^k - \sqrt{10^{2k} - 2\cdot 10^k}) < 1 + 10^{-8}$. За то k, обележимо са $\varepsilon = 10^k - \sqrt{10^{2k} - 2\cdot 10^k} - 1$. Тада је $\varepsilon < 10^{-8}$. Како је $\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+\varepsilon)^n = \infty$ и $1+\varepsilon < 7989,7988$ то постоји највећи природан број n за који је $(1+\varepsilon)^n \leqslant 7989,7988$. Докажимо да је $(1+\varepsilon)^{n+1} < 7989,7989$. Претпоставимо супротно. Тада би важило

$$7989,7989 \leqslant (1+\varepsilon)^n = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^n \leqslant (1+\varepsilon)\cdot 7989,7988$$

што повлачи $\varepsilon \geqslant \frac{0,0001}{7989,7989}$. Ово је у супротности са $\varepsilon < 10^{-8}$. Дакле, треба одабрати $c = n$, чиме ће бити задовољен услов $(*)$. Овим је доказ комплетиран. $\Box$

6. Најпре ћемо доказати да број инцидентних парова не може бити већи од 159. Претпоставимо супротно, да постоје скупови T и P који задовољавају услове задатка и за које је број инцидентних парова већи од 159. За сваку тачку $A \in T$ означимо са p_A број правих из P које садрже A. Дакле, $\sum_{A\in T} p_A > 159$. Приметимо да је број *парова* правих из P које се секу у A једнак $\binom{p_A}{2}$, имајући у виду да је $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$. Како је укупан број парова правих из P једнак $\binom{16}{2} = 120$, добијамо $\sum_{A\in T}\binom{p_A}{2} \leqslant 120$.
Даље, нека су $a_1, \ldots, a_{66}$ ненегативни цели бројеви такви да је

$$\sum_{i=1}^{66} a_i > 159, \qquad (1)$$

а $\sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2}$ минимално. Из онога што смо претходно закључили о бројевима p_A, $A \in T$, јасно је да такви $a_1, \ldots, a_{66}$ постоје, и да је

$$\sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2} \leqslant 120. \qquad (2)$$

Из (1) следи да постоји $i_1 \in \{1,2,\ldots,66\}$ тако да $a_{i_1} \geqslant 3$, а из (2) следи да постоји $i_2 \in \{1,2,\ldots,66\}$ тако да $\binom{a_{i_2}}{2} \leqslant 2$, односно $a_{i_2} \leqslant 2$.
Претпоставимо да за неко $i_3 \in \{1,2,\ldots,66\}$ важи $a_{i_3} \leqslant 1$. Ако дефинишемо

$$\begin{aligned} &b_i = a_i, \text{ za sve } i \in \{1,2,\ldots,66\}\setminus\{i_1,i_3\},\\ &b_{i_1} = a_{i_1} - 1, \quad b_{i_3} = a_{i_3} + 1, \end{aligned}$$

добијамо да је $\sum_{i=1}^{66} b_i = \sum_{i=1}^{66} a_i > 159$, а

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{66}\binom{b_i}{2} &= \sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2} + \left(\binom{a_{i_1}-1}{2} - \binom{a_{i_1}}{2}\right) + \left(\binom{a_{i_3}+1}{2} - \binom{a_{i_3}}{2}\right)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2} - 2 + 1 < \sum_{i=1}^{66}\binom{a_i}{2}, \end{aligned}$$

што је у контрадикцији са дефиницијом бројева $a_1, \ldots, a_{66}$. Према томе, $a_i \geq 2$, за свако $i \in \{1,2,\ldots,66\}$.

Претпоставимо сада да за неко $i_4 \in \{1, 2, \dots, 66\}$ важи $a_{i_4} \geqslant 4$. Ако дефинишемо

$$
\begin{aligned}
c_i &= a_i,\ i \in \{1, 2, \dots, 66\} \setminus \{i_2, i_4\},\\
c_{i_2} &= a_{i_2} + 1, \quad c_{i_4} = a_{i_4} - 1,
\end{aligned}
$$

слично као у претходном случају добијамо да је постојање низа $c_1, \dots, c_{66}$ у контрадикцији са дефиницијом бројева $a_1, \dots, a_{66}$. Према томе, $a_i \leqslant 3$, за свако $i \in \{1, 2, \dots, 66\}$. Означимо $\ell = |\{i \in \{1, 2, \dots, 60\} : a_i = 2\}|$. Из (1) добијамо $\sum_{i=1}^{66} a_i = 2\ell + 3(66-\ell) > 159$, па и $\ell < 39$, а из (2) добијамо $\sum_{i=1}^{66} \binom{a_i}{2} = \ell\binom{2}{2} + (66-\ell)\binom{3}{2} \leq 120$, па и $\ell \geqslant 39$, контрадикција. Према томе, не постоје скупови T и P који задовољавају услове задатка и за које је број инцидентних парова већи од 159.
Остаје нам да конструишемо скупове T и P за које је број инцидентних парова тачно 159. На слици се види 16 правих са 27 тространих пресека (три праве се секу у тачки) означених црном тачком, и свим преосталим двоструким пресецима (две праве се секу у тачки) – иако се четрнаест парова правих секу изван слике, јасно је да су и сви ти пресеци двоструки. Укупан број пресека правих је 66. Иначе, у овој конструкцији није кориш ћено ниједно тврђење, добијена је само узастопним постављањем праве кроз две тачке.