MINISTARSTVO PROSVETE
REPUBLIKE SRBIJE

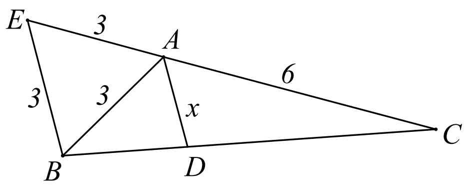
DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE

II SRPSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Kragujevac, 04. jun 2008.

R E Š E NJ A

1.



Označimo sa x dužinu duži AD. Neka je E tačka na produžetku duži AC, takva da je $AE = 3$. Trougao ABE je jednakostraničan, pa je $BE = 3$. Kako je $\measuredangle DAB = \measuredangle ABE = 60°$, to je $BE \parallel DA$, pa su trouglovi ADC i EBC slični. Sledi da je $\frac{x}{3} = \frac{6}{9}$, odakle je $x = 2$.

2. Za $n = 1$ broj je 5.

Za $n = 8$ dobijamo broj 201, kome je suma cifara 3. Dokazaćemo da je ovo tražena minimalna suma cifara.

$$3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1 \equiv_2 1,$$

pa su svi brojevi datog oblika neparni. Zato je nemoguće da brojevi imaju sumu cifara 1, kao ni da budu oblika $2 \cdot 10^m$. Prema tome, treba ispitati da li jednačina

$$3n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

ima rešenja u skupu prirodnih brojeva.

Transformacijom dobijamo

$$n(3n+1) = 10^m = 1 \cdot 10^m = 2^m \cdot 5^m.$$

Kako su brojevi n i $3n+1$ uzajamno prosti, imamo dva slučaja ($n < 3n+1$)

$$n = 1,\ 3n+1 = 10^m \qquad \text{ili} \qquad n = 2^m,\ 3n+1 = 5^m.$$

Prvi slučaj je nemoguć, dok za drugi slučaj dobijamo

$$3n + 1 = 3 \cdot 2^m + 1 = 5^m.$$

Za $m = 1$ i $m = 2$ ne dobijamo jednakost ($3 \cdot 2 + 1 \neq 5$ i $3 \cdot 4 + 1 \neq 25$), pa imamo sledeću procenu

$$5^m = 5^2 \cdot 5^{m-2} > 24 \cdot 5^{m-2} > 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{m-2} = 3 \cdot 2^{m+1} > 3 \cdot 2^m + 1,$$

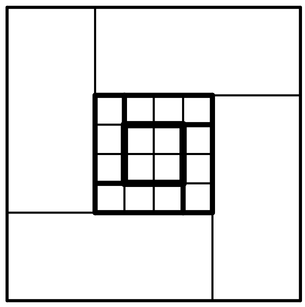
pa data jednačina nema rešenja u skupu prirodnih brojeva. Kako smo isključili 1 i 2, zaključujemo da je najmanja suma cifara jednaka 3.

3. (a) Obojimo polja kvadrata 100×100 bojama $1,\ 2,\ 3$ kao na slici.

1	3		$\cdots$	1	3	2	1
2	1	3	$\cdots$		1	3	2
	2	1	$\cdots$			1	3
			$\cdots$				1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$\cdots$		2	1	3
1			$\cdots$			2	1

Posle odsecanja kvadrata 2×2, u preostalom delu biće 333 kvadrata boje 1, 331 kvadrat boje 2 i 332 kvadrata boje 3. Kako svaki pravougaonik 1×3 pokriva po jedno polje svake boje, popločavanje je nemoguće.

(b) Posle isecanja centralnog kvadrata 2×2, uokvirimo rupu sa 4 pravougaonika, kao na slici.



Ostatak se može razložiti na 4 pravougaonika 48×52. Kako $3 \mid 48$, popločavanje je moguće.

4. Sabiranjem datih jednakosti dobija se
$$xy + zt = x + y + z + t$$
pa je
$$xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2.$$
Tada je $x(y-1) - (y-1) + z(t-1) - (t-1) = 2$ ili
$$(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2.$$
Kako je $x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1,\ t \geqslant 1$ to je
$$x-1 \geqslant 0,\ y-1 \geqslant 0,\ z-1 \geqslant 0,\ t-1 \geqslant 0,$$
pa su mogući sledeći slučajevi:

1°) $(x-1)(y-1) = 0$ i $(z-1)(t-1) = 2$,

2°) $(x-1)(y-1) = 1 = (z-1)(t-1)$ i

3°) $(x-1)(y-1) = 2$ i $(z-1)(t-1) = 0$.

Ako je $(x-1)(y-1) = 0$ onda je $x = 1$ ili $y = 1$, a iz $(z-1)(t-1) = 2$ sledi da je $z = 2$ i $t = 3$ ili $z = 3$ i $t = 2$. Kako je $zt = 6 = x + y$ to su moguća rešenja $(1,5,2,3),\ (1,5,3,2),\ (5,1,2,3),\ (5,1,3,2)$.

Ako je $x-1 = y-1 = z-1 = t-1 = 1$, jedino rešenje je $x = y = z = t = 2$, tj. rešenje je $(2,2,2,2)$.

U trećem slučaju razmatranje je analogno prvom i dobijamo rešenja $(2,3,1,5)$, $(2,3,5,1),\ (3,2,1,5),\ (3,2,5,1)$.

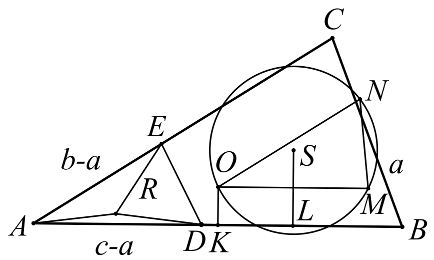
5. Dokazaćemo da je traženi zbir najveći ako imamo domine sa parovima brojeva $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(2\,007, 2\,008)$. Pretpostavimo da na dve domine imamo parove (a,b) i c,d i da važi raspored $a > b$ i $c > d$. Bez gubljenja opštosti, neka je a najveći medju brojevima a, b, c, d. Ukoliko izvršimo zamenu brojeva - tada bi imali domine sa parovima (a,c) i (b,d).

Ako se zbir svih recipročnih vrednosti povečava, tada važi nejednakost
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}<\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$
Sredjivanjem dobijamo $ab+cd-ac-bd>0$, odnosno $(a-d)(b-c)<0$. Kako je $a>d$, sledi da b mora biti manje od c.

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo da je zbir $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1004}}$ najveći kada su brojevi na dominama uzastopni i jednaki $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(2\,007, 2\,008)$.

Dakle, sada treba proceniti sumu
$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1004}} &\leqslant \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\,007\cdot 2\,008}\\ &= \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2\,008-2\,007}{2\,007\cdot 2\,008}\\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2\,007}-\frac{1}{2\,008}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\,008}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\,008}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\,008}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1\,004}\right)\\ &= \frac{1}{1\,005}+\frac{1}{1\,006}+\ldots+\frac{1}{2\,008}.\end{aligned}$$

6.



Neka su K i L podnožja normala iz tačke O (centra opisanog kruga oko trougla ABC) i tačke S (centra upisanog kruga u trougao ABC) na stranicu AB.

Neka su $OM \parallel AB$ i $ON \parallel AC$ tetive kruga $k(S, SO)$.

Tada je $OM = 2KL$. Kako je $KL = KB - LB$ to je
$$KL = \frac{c}{2}-\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)=\frac{b-a}{2},$$
pa je $OM = b-a$.

Analogno se dokazuje da je $ON = c-a$.

Kako je $AD = c-a$ i $AE = b-a$ i kako je $\measuredangle BAC = \measuredangle MON$ (kao uglovi sa paralelnim kracima) to je $\Delta ADE \cong \Delta OMN$, jer je $AD = ON = c-a$, $\measuredangle BAC = \measuredangle MON$ i $AE = OM = b-a$ (SUS).

Iz podudarnosti trouglova ADE i OMN sledi i da su poluprečnici krugova koji su oko njih opisani jednaki, tj. $OS = R$.