СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 12.04.2008.

Први дан

1. У скупу целих бројева решити једначину

$$12^x + y^4 = 2008^z.$$

(Милош Милосављевић)

2. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D и E на правој AB такве да је $D - A - B - E$, $AD = AC$ и $BE = BC$. Симетрале унутрашњих углова код темена A и B секу наспрамне странице у тачкама P и Q, редом, а описану кружницу око троугла ABC у тачкама M и N, редом. Права која спаја тачку A са центром кружнице описане око троугла BME и права која спаја тачку B са центром кружнице описане око троугла AND секу се у тачки X, $X \neq C$. Доказати да је $CX \perp PQ$. *(Душан Ђукић)*

3. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b и c, такве да је $a+b+c=1$, важи неједнакост

$$\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}} + \frac{1}{ca+b+\frac{1}{b}} + \frac{1}{ab+c+\frac{1}{c}} \leqslant \frac{27}{31}.$$

(Марко Радовановић са сарадницима)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 13.04.2008.

Други дан

4. Свака тачка равни је обојена са једном од 3 боје. Доказати да постоји троугао за који важи:

1° сва 3 темена тог троугла су обојена истом бојом;

2° полупречник описане кружнице тог троугла је 2008;

3° један угао троугла је два или три пута већи од неког од друга два угла. *(Владимир Балтић)*

5. Нека је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, за $n \geqslant 3$. Доказати да је сваки члан овог низа облика $a^2 + 2b^2$ за неке природне a и b. *(Ђорђе Баралић)*

6. Нека је $ABCDE$ конвескан петоугао у коме је $AB = 1$, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDE = 60^\circ$ и $\sphericalangle ADB = 30^\circ$. Доказати да је површина петоугла $ABCDE$ мања од $\sqrt{3}$. *(Милош Милосављевић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. За $x < 0$ или $z \leq 0$ једино решење је тривијално $(0,0,0)$. Надаље је $z > 0$. Како је $2008 = 2^3 \cdot 251$, обе стране једначине су дељиве са 251. Претпоставимо да је $x = 2x_1$ парно. Тада $(2^{x_1})^2 \equiv -(y^2)^2 \pmod{251}$, што дизањем на 125-ти степен даје $1 \equiv (2^{x_1})^{250} \equiv -(y^2)^{250} \equiv -1$ по малој Фермаовој теореми, а то је немогуће. Према томе, x мора бити непарно.

Очигледно је y парно. Напишимо $y = 2^u y_1$ за непарно y_1. Имамо

$$2^{2x}3^x + 2^{4u}y_1^4 = 2^{3z}251^z.$$

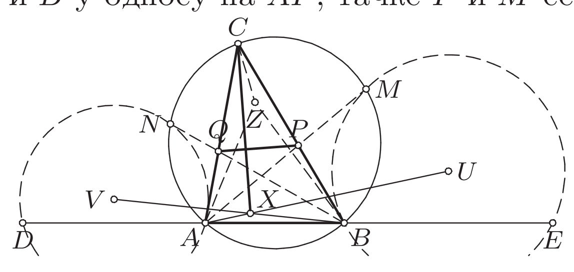
Како је $2x \neq 4u$ јер је x непарно, највећи степен двојке који дели леву страну је 2^{2x} или 2^{4u}, док је највећи степен двојке који дели десну страну једнак 2^{3z}, одакле је $3z = 2x$ или $3z = 4u$. Показаћемо да ни у једном од ова два случаја дата једначина нема решења.

(i) $3z = 2x < 4u$; дакле, $2 \mid z$. Скраћивање са 2^{2x} даје $3^x + 2^{4u-2x}y_1^4 = 251^z$ што је немогуће јер је лева страна облика $4k+3$ (јер $2 \nmid x$), а десна облика $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$).

(ii) $3z = 4u < 2x$; опет $2 \mid z$. Скраћивање са 2^{4u} даје $2^{2x-4u}3^x + y_1^4 = 251^z$. Десна страна је облика $5k+1$, па за $5 \nmid y_1$ имамо $y_1^4 \equiv 1$ и $2^{2x-4u}3^x \equiv 0 \pmod 5$ што је немогуће, док за $5 \mid y_1$ имамо $1 \equiv 2^{2x-4u}3^x \equiv \pm 3^x \equiv \pm 3 \pmod 5$ јер $2 \nmid x$, опет немогуће.

Друго решење. За парно x лева страна једначине је облика $a^2 + b^2$, а за непарно x лева страна је облика $a^2 + 3b^2$. Међутим, како су -1 и -3 квадратни неостаци по модулу 251, ни $a^2 + b^2$ ни $a^2 + 3b^2$ не могу да буду дељиви са 251 ако $251 \nmid a$. Према томе, дата једначина нема целобројних решења за $z \geq 0$.

2. Означимо са U центар описаног круга $\triangle BME$. Применимо инверзију са центром A и квадратом полупречника $AB \cdot AC$. Тачке B и C се сликају у тачке B' и C' симетричне тачкама C и B у односу на AP, тачке P и M се сликају једна у другу, а E се слика у тачку E' симетричну Q у односу на AP. Према томе, права AU се поклапа са правом која спаја A са центром круга $B'PE'$ (наравно, центри се не сликају један у други!). Видимо да је та права симетрична



правој AZ у односу на симетралу угла A, где је Z центар круга описаног око $\triangle CPQ$.

Аналогно се добија да је права BZ симетрична правој која спаја B са центром V круга AND у односу на симетралу угла B. По Чевиној теореми у тригонометријском облику (или по тврђењу о изогонално спрегнутим тачкама), праве симетричне правим AU, BV, CX у односу на симетрале углова A, B, C редом се такође секу у једној тачки, што значи да је права CZ симетрична CX у односу на симетралу угла C. Али Z је центар круга CPQ, одакле следи да права CX садржи висину троугла CPQ, а то смо и желели да докажемо.

3. Тражена неједнакост је очигледно еквивалентна неједнакости

$$\frac{a}{p+a^2}+\frac{b}{p+b^2}+\frac{c}{p+c^2}\le\frac{27}{31},$$

где је $a+b+c=1$ и $p=abc+1$. Посматраћемо функцију

$$f(x)=\frac{3(a+b+c)}{3x+a^2+b^2+c^2}-\frac{a}{x+a^2}-\frac{b}{x+b^2}-\frac{c}{x+c^2}.$$

Доказаћемо да важи $f(x)\ge 0$ за све $x\ge ab+bc+ca$. Свођење израза за $f(x)$ на заједнички именилац даје

$$f(x)=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+a^2)(x+b^2)(x+c^2)(3x+a^2+b^2+c^2)},$$

при чему је $A\ge 0\ge C$. Заправо, лако се добија

$$A=2a^3+2b^3+2c^3-ab(a+b)-ac(a+c)-bc(b+c)\ge 0,$$
$$C=-abc[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)-2abc(a+b+c)]\le 0.$$

Приметимо да није важно колико је B. Према томе, полином $P(x)=Ax^2+Bx+C$ (ако није константно 0) има две реалне нуле, једну позитивну (рецимо $x=x_0$) и једну негативну, и важи $P(x)\le 0$ за $0\le x\le x_0$ и $P(x)\ge 0$ за $x\ge x_0$. Тврдимо да је $f(ab+bc+ca)\ge 0$. Заиста,

$$\begin{aligned}&f(ab+bc+ca)\\&=\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}-\frac{a}{(a+b)(a+c)}-\frac{b}{(b+c)(b+a)}-\frac{c}{(c+a)(c+b)}\\&=\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}-\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0\qquad\text{јер је}\end{aligned}$$

$$\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}\ge\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

што смо и желели. Према томе, $P(ab+bc+ca) \geq 0$, тј. $x_0 \leq ab+bc+ca$, одакле следи да је и $P(x) \geq 0$ и $f(x) \geq 0$ за све $x \geq ab+bc+ca$. Између осталог, $f(1+abc) \geq 0$ јер је $1+abc > 1 > ab+bc+ca$. Тако смо доказали

$$\frac{a}{1+abc+a^2} + \frac{b}{1+abc+b^2} + \frac{c}{1+abc+c^2} \leq \frac{3}{3+a^2+b^2+c^2+3abc}\,. \qquad (1)$$

Остаје још само да докажемо да је $a^2+b^2+c^2+3abc \geq \frac{4}{9}$, што ће заједно са (1) дати тражену неједнакост. Хомогенизација даје $9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geq 4(a+b+c)^3$, што је еквивалентно са

$$5(a^3+b^3+c^3)+3abc \geq 3(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)).$$

Последња неједнакост одмах следи из Шурове неједнакости. Овим је доказ тврђења задатка коначно завршен.

Друго решење. Након хомогенизације, свођења на заједнички именилац и скраћивања неједнакост се своди на симетричну неједнакост која се директно доказује Мјурхедовом неједнакошћу:

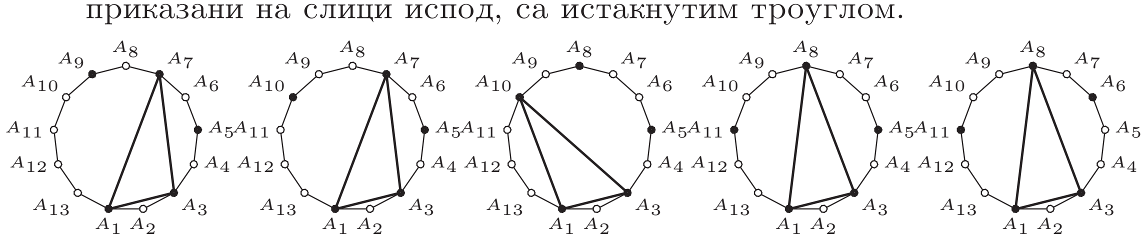
$$\frac{23}{2}T_{900}+122T_{810}+260T_{720}+282T_{630}+193T_{540}+\frac{547}{2}T_{711}+807T_{620}+284T_{531}$$

$$+91T_{522}-98T_{441}-1669T_{432}-557T_{333} \geq 0,$$

где је T_{ijk} симетрична сума $x^i y^j z^k + \cdots$.

4. Уочимо правилан тринаестоугао $A_1A_2\ldots A_{13}$ уписан у круг полупречника 2008. По Дирихлеовом принципу постоји пет темена која су исте боје (нпр. црвене). Разликујемо два случаја.

(i) Међу пет црвених темена не постоје два суседна. Сваком положају црвених тачака (до на ротацију) одговара композиција броја 13 на 5 сабирака већих од 1. Постоји 5 неподударних распореда и они су приказани на слици испод, са истакнутим троуглом.



$2+2+2+2+5$ $\quad$ $2+2+2+3+4$ $\quad$ $2+2+3+2+4$ $\quad$ $2+2+3+3+3$ $\quad$ $2+3+2+3+3$

(ii) Нека два црвена темена су суседна, рецимо A_1 и A_2. Ако је црвена било која од тачака $A_4, A_5, A_6, A_{10}, A_{11}, A_{12}$, тражени троугао је одређен том тачком и теменима A_1, A_2. Надаље претпостављамо да ниједна од ових 6 тачака није црвена. Тада су међу теменима A_3, A_7, A_8, A_9, A_{13} бар три црвена. Ако је међу њима A_3 (аналогно за A_{13}), онда је бар једна од тачака A_7, A_9, A_{13} црвена па бар један од троуглова одређених овом тачком и тачкама A_1 и A_3 задовољава услове. Једини преостали случај је кад су црвене тачке A_7, A_8, A_9, а онда је троугао $A_1A_7A_9$ тражени.

5. Имамо $a_1 = 1 + 2 \cdot 1^2$, $a_2 = 3^2 + 2 \cdot 1^2$, $a_3 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$, $a_4 = 11^2 + 2 \cdot 4^2$, итд. Доказаћемо индукцијом по n да важи

$$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + 2\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad a_{2n} = a_n^2 + 2\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)^2,$$

при чему је $a_0 = 1$. Претпоставимо да тврђење важи за n. Тада је

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= 4a_{2n} - a_{2n-1} = 4a_n^2 + 8\left(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}^2 - 2\left(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)^2 \\
&= \tfrac{11}{2}a_n^2 - 3a_na_{n-1} + \tfrac{1}{2}a_{n-1}^2 = \tfrac{11}{2}a_n^2 - 3a_n(4a_n - a_{n+1}) + \tfrac{1}{2}(4a_n - a_{n+1})^2 \\
&= \tfrac{3}{2}a_n^2 - a_na_{n+1} + \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\left(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)^2; \\
a_{2n+2} &= 4a_{2n+1} - a_{2n} = 4a_n^2 + 8\left(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)^2 - a_n^2 - 2\left(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2}\right)^2 \\
&= 3a_n^2 + 8\left(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)^2 - 2\left(\tfrac{a_{n+1} - 3a_n}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{2}a_{n+1}^2 - a_na_{n+1} + \tfrac{1}{2}a_n^2 \\
&= a_{n+1}^2 + 2\left(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен.

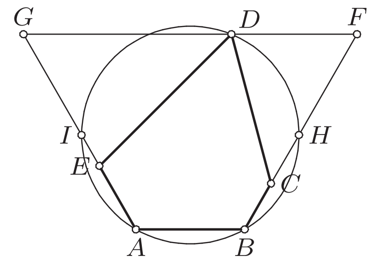
Друго решење. Познато је да се непаран природан број $m > 1$ може представити у облику $a^2 + 2b^2$ за неке узајамно просте $a, b \in \mathbb{N}$ ако и само ако су сви прости делиоци m облика $8k+1$ или $8k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$. Лако се види да су сви чланови низа (a_n) непарни; остаје да покажемо да ако прост број p дели a_n, онда је $p = 8k + 1$ или $8k + 3$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$.

Показује се индукцијом по n да је $a_na_{n+2} = a_{n+1}^2 + 2$. Заиста, ово важи за $n \leq 2$, а за $n > 2$, уз претпоставку да важи за $n - 2$, имамо

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} &= \tfrac{(4a_n - a_{n-1})^2 + 2}{a_n} = 16a_n - 8a_{n-1} + \tfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_n} \\
&= 16a_n - 8a_{n-1} + a_{n-2} = 4a_{n+1} - a_n = a_{n+2}.
\end{aligned}$$

Одавде следи да је -2 квадратни остатак по сваком простом делиоцу p броја a_n, па је $p \equiv 1$ или $p \equiv 3 \pmod{8}$.

6. Нека је k круг описан око троугла ABD, и l права кроз D паралелна са



AB. Полупречник круга k је 1. Полуправе BC и AE секу k у тачкама H и I, а праву l у F и G, редом. Троуглови FCD и GDE су слични јер је $\angle CFD = \angle DGE = 60^\circ$ и $\angle FCD = 120^\circ - \angle CDF = \angle GDE$. Означимо са $k = \frac{FC}{GD} = \frac{FD}{GE}$ коефицијент сличности, са h растојање тачке D од HI, и $x = FD$, $y = GD$. Лако се налази да је $x + y = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ и $xy = \frac{4}{3}h^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ (производ xy је потенција тачке F у односу на k и једнак је $OF^2 - 1$, где је O центар круга k). Тако добијамо

$$P_{ABFG} = \tfrac{1}{2}(1 + x + y)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + h\right) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}h^2 + 2h + \tfrac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$P_{FCD} + P_{GDE} = \tfrac{1}{2}(x \cdot FC + y \cdot GE)\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{4}xy\left(k + \tfrac{1}{k}\right) \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2}xy = \tfrac{2}{\sqrt{3}}h^2 + h,$$

па је

$$P_{ABCDE} = P_{ABFG} - (P_{FCD} + P_{GDE}) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + h + \frac{3\sqrt{3}}{4} = f(h).$$

Квадратна функција $f(h)$ достиже максимум за $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, чиме је доказано да је $P_{ABCDE} \leq \sqrt{3}$. Једнакост би важила само ако је $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $k = 1$; тада би (ако без смањења општости претпоставимо $DA \geq DB$) тачка D била симетрична тачки B у односу на HI, па би троугао ADG био једнакостраничан и $FC = GD = GA = FB$ што је немогуће јер би се B и C поклапале. Зато је горња неједнакост строга.

Друго решење. Претпоставимо да троугао ABD није тупоугли. Тада се тачке C' и E' симетричне тачкама C и E у односу на праве BD и AD редом налазе унутар троугла ABD, на истој правој кроз D, и важи

$$S_{ABCDE} = S_{ABD} + S_{ADE} + S_{BDC} = S_{ABD} + S_{ADE'} + S_{BDC'} \leq 2S_{ABD} - S_{ABF},$$

при чему F тачка пресека правих AE' и BC'. Једнакост важи ако и само ако је $F \equiv C' \equiv E'$. Означимо $\angle BAD = \alpha$. Тада је $\angle ABD = 150^\circ - \alpha$, $\angle BAF = 2\alpha - 120^\circ$, $\angle ABF = 180^\circ - 2\alpha$, па важи

$$S_{ABD} = \sin\alpha \sin(150^\circ - \alpha) = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{1}{2}\cos(150^\circ - 2\alpha) = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{1}{2}u,$$
$$S_{ABF} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin(2\alpha - 120^\circ)\sin 2\alpha = -\tfrac{\sqrt{3}}{12} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\cos(300^\circ - 4\alpha) = -\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}u^2,$$

где је $\cos(150^\circ - 2\alpha) = u$ и одатле $\cos(300^\circ - 4\alpha) = 2u^2 - 1$. Сада имамо

$$S_{ABCDE} \leq 2S_{ABD} - S_{ABF} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + u - \frac{u^2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{3},$$

уз једнакост која би важила за $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $\alpha \in \{60^\circ, 90^\circ\}$, и $F \equiv C' \equiv E'$, али се никада не достиже јер се за ове вредности α тачка F налази у темену правог угла, па је петоугао дегенерисан.

У случају тупоуглог троугла ABD, уз исте ознаке, тачка F се налази изван троугла ABD, али горњи израз за површину $\triangle ABF$ узима негативне вредности, па се опет добија $S_{ABCDE} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} + u - \frac{u^2}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}$.