46. Савезно такмичење из математике ученика средњих школа Вршац, 15. – 16. 04. 2006.

***мр Ђорђе Кртинић,* Београд**

Задаци

Први разред

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 55^\circ$, $\sphericalangle DCA = 20^\circ$, $\sphericalangle BCA = 15^\circ$. Одредити величину угла $\sphericalangle DBA$.

2. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$xy + yz + zx \geqslant 4\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 5xyz\,.$$

Када важи једнакост?

3. Одредити највећи природан број чије су све цифре различите и који је дељив сваком својом цифром, тј. одговарајућим једноцифреним бројем.

4. Татјана је замислила полином $P(x)$, чији су коефицијенти из скупа $\mathbb{N}_0$. Даница жели да одреди тај полином. Она у једном потезу изговара цео број k, а Татјана јој саопштава вредност $P(k)$. Наћи најмањи број потеза потребних Даници да открије полином који је Татјана замислила.

Други разред

1. Нека су a, b, c, A, B, C реални бројеви, такви да је $a \neq 0$, $A \neq 0$ и за свако реално x важи $\left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant \left|Ax^2 + Bx + C\right|$. Доказати да важи $\left|b^2 - 4ac\right| \leqslant \left|B^2 - 4AC\right|$.

2. За произвољну тачку M унутар квадрата $ABCD$, нека су T_1, T_2 и T_3 тежишта троуглова ABM, BCM и DAM, редом. Нека је O_M центар описане кружнице троугла $T_1T_2T_3$. Одредити геометријско место тачака O_M, када се тачка M креће по унутрашњости квадрата $ABCD$.

3. За сваки природан број a нека је $S(a) = \{a^n + a + 1 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. Да ли постоји бесконачан скуп $A \subset \mathbb{N}$, такав да за свака два различита елемента $x, y \in A$ важи:

$$x \text{ и } y \text{ су узајамно прости и } S(x) \cap S(y) = \emptyset\,?$$

4. На столу је у низ поређано n новчића. У једном кораку дозвољено је одабрати један новчић окренут писмом нагоре (али не један од крајњих), уклонити га и окренути први новчић лево и први новчић десно од њега. На почетку су сви новчићи окренути писмом нагоре. Доказати да је могуће после неколико корака постићи да остану само два новчића ако и само ако $n - 1$ није дељиво са 3.

Трећи и четврти разред

1. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Доказати да је

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\geqslant\frac{9}{4}\,.$$

Када важи једнакост?

2. Нека су p и q прости бројеви и нека је $p<q$. Одредити све парове (x, y) природних бројева за које важи

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\,.$$

3. Доказати да за произвољан тетраедар постоје две равни такве да однос површина пројекција тетраедра на те две равни није мањи од $\sqrt{2}$.

4. У квадратну таблицу 7×7 Милош је уписао све природне бројеве од 1 до 49. Ђорђе треба да одгонетне распоред бројева у таблици. Он може да изабере квадрат који покрива нека поља таблице и да Милошу постави питање који се бројеви налазе у унутрашњости тог квадрата. Колико најмање питања Ђорђе треба да постави да би на основу Милошевих одговора сазнао распоред свих бројева у таблици?

Квалификационо такмичење за избор олимпијске екипе (Мала олимпијада)

1. Нека је $S=\{1,2,3,\dots,2006\}=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, при чему важи:

(1) $13\in A$;

(2) ако је $a\in A, b\in B, a+b\in S$, онда је $a+b\in B$;

(3) ако је $a\in A, b\in B, ab\in S$, онда је $ab\in A$.

Одредити број елемената скупа A.

2. У унутрашњости правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle ACB=90^\circ$) уочена је тачка P, таква да је $AP=4, BP=2$ и $CP=1$. Тачка Q, која је симетрична тачки P у односу на AC, припада описаној кружници троугла ABC. Одредити углове троугла ABC.

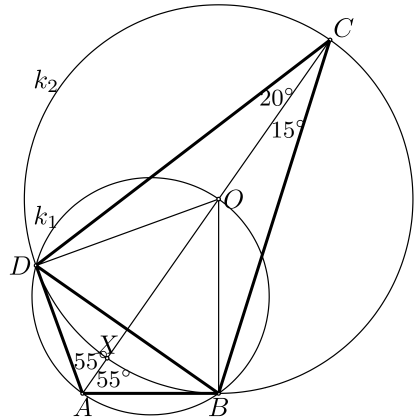
3. Одредити све природне бројеве n и k, $k>1$, такве да k дели сваки од бројева

$$\binom{n}{1}\,,\ \binom{n}{2}\,,\ \dots\,,\ \binom{n}{n-1}\,.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Први разред

1. Нека је O пресечна тачка описане кружнице $\triangle ABD$ (k_1) и праве AC. Тада је $BO = DO$ (тетиве над истим углом у k_1) и $\sphericalangle BOD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 70^\circ$. Дакле, кружница са центром у O и полупречника OD (k_2) пролази кроз тачку B, а како је $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOD$ и кроз тачку C (по теореми о централном и периферијском углу).
Нека је X пресечка тачка праве AC и k_2. Тада је $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DOA$ (углови над AD у k_1), тј. $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DOX = 2 \cdot \sphericalangle DCX = 2 \cdot \sphericalangle DCA = 40^\circ$ ($\sphericalangle DOX$ два пута већи од $\sphericalangle DCX$, као централни и периферијски у k_2).



2. Помоћу $x+y+z=1$ се тражена неједнакост може хомогенизовати, тј. она је еквивалентна са

$$(xy+yz+zx)\cdot(x+y+z)^2 \geqslant 4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+5xy\cdot(x+y+z)\ ,$$

односно, након сређивања, са

$$(1) \qquad x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3 \geqslant 2\cdot\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\ .$$

Како за $a,b>0$ важи $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ (неједнакост између аритметичке и геометријске средине), следи

$$\begin{aligned} x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3 &= xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(x^2+z^2) \\ &\geqslant 2\cdot(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2), \end{aligned}$$

тј. (1).

Једнакост важи акко је $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Напомена. Неједнакост (1) је последица Мјурхедове неједнакости ($(3,1,0) \geqslant (2,2,0)$).

3. Тражени број не може имати више од 9 цифара, јер су све његове цифре различите од 0 (по услову задатка). Међутим, ако би био дељив и са 5 и са 2, морао би да се завршава са 0, па не садржи ни 5 (како су 4, 6, 8 дељиви са 2, изостављање дељивости са 2 би довело да броја који је највише петоцифрен). Како је збир преосталих цифара 40, а међу њима се налази 9, мора се изоставити бар још једна цифра, а ако 9 остане у скупу, то мора бити 4.
Дакле, ако се од цифара $1,2,3,6,7,8,9$ може конструисати број са траженом особином, највећи међу њима је и тражени број. Највећи међу њима је (ако постоји) облика $98xy312$, где су x и y 6 и 7 у неком поретку (највећи не може бити већи од броја који почиње са 98 и

мањи од броја који се завршава са 312; комбинација 321 се одбацује због парности). Јасно је да је сваки број овог облика дељив са $2, 3, 6, 8, 9$, а како $7 \nmid 9\,876\,312$ и $7 \mid 9\,867\,312$, тражени број је 9867312.

4. Даница може да одгонетне полином у два потеза. На пример, у првом потезу затражи од Татјане да јој саопшти $P(1)$ (ово питање треба да процени величину коефицијената полинома $P(x)$; како је $P(x)$ полином са коефицијентима из $\mathbb{N}_0$, сваки коефицијент је не већи од a), а затим нпр. $P(10^a)$, где је $a = P(1)$.
Нека је $b = P(10^a)$. Сваки природан број има јединствено представљање у систему са основом 10^a, па како је $10^a > a$, коефицијенти полинома $P(x)$ су „цифрежж у представљању броја b у систему са основом 10^a.
Потребно је још показати да је један потез недовољан да Даница утврди замишљени полином, тј. да за свако $k \in \mathbb{Z}$ постоји бар два полинома са коефицијентима у $\mathbb{N}_0$, који имају једнаке вредности у k. Ако је $k \geqslant 0$, такви полиноми су $2k$ и $x + k$, а за $k < 0$, такви су $x + (-k)$ и $x^2 + (-k+1)x + (-k)$.

Друго решење. Као и у првом решењу, прво питање треба да послужи процени величине коефицијената и степена полинома $P(x)$. Томе може да послужи вредност полинома у 2 ($P(1)$ даје процену величине коефицијената, али не и степена полинома, док $P(2)$ може послужити и за једно и за друго). Конкретно, како је $P(2) \geqslant 2^n$, следи $n \leqslant [\log_2 P(2)]$, као и да је сваки коефицијент не већи од $P(2)$.
Дакле, после првог корака, Даница може да сузи могућност за $P(x)$ на коначан скуп полинома. Нека су то полиноми $P_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ (полиноми чији су коефицијенти не већи од $P(2)$, степен не већи од $[\log_2 P(2)]$ и вредност у 2 једнака $P(2)$). Нека је

$$Q(x) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \left(P_j(x) - P_i(x)\right).$$

Како $Q(x)$ није идентички једнак нули, постоји $b \in \mathbb{Z}$, тако да је $Q(b) \neq 0$. Даница у другом потезу треба да пита за вредност $P(b)$, јер полиноми $P_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ узимају различите вредности у тачки b.
Као и у првом решењу се показује да је један потез недовољан да Даница реконструише замишљени полином.

Други разред

1. Да би дата неједнакост важила за довољно велико x, мора бити $|a| \leqslant |A|$ (следи из $\left|a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right| \to |a|$ и $\left|A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}\right| \to |A|$ кад $x \to \infty$).

(1) Ако је $B^2 - 4AC > 0$, тада једначина $Ax^2 + Bx + C = 0$ има различите реалне корене (x_1 и x_2). Из услова задатка, следи да и једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има исте корене (наравно, важи $b^2 - 4ac > 0$), па важи $|x_1 - x_2| = \dfrac{B^2 - 4AC}{A} = \dfrac{b^2 - 4ac}{a}$, одакле је $B^2 - 4AC = A^2(x_1 - x_2)^2 \geqslant a^2(x_1 - x_2)^2 = b^2 - 4ac$.

(2) Нека је $B^2 - 4AC \leqslant 0$ и $b^2 - 4ac \leqslant 0$. Како је $|A| \geqslant |a|$, у овом случају довољно је доказати да тврђење важи за $A \geqslant a > 0$. Нека функција $ax^2 + bx + c$ достиже

минимум у $m\ \left(=-\frac{b}{2a}\right)$, а функција Ax^2+Bx+C достиже минимум у $M\ \left(=-\frac{B}{2A}\right)$. Тада је

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=am^2+bm+c\leqslant aM^2+bM+c\leqslant AM^2+BM+C=\frac{4AC-B^2}{4A}\,,$$

па следи $4ac-b^2\leqslant\dfrac{a}{A}\cdot(4AC-B^2)\leqslant 4AC-B^2$.

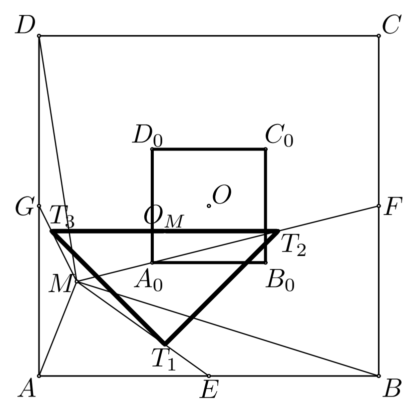
(3) Нека је $B^2-4AC\leqslant 0$ и $b^2-4ac>0$. Тада је неједнакост $\left|ax^2+bx+c\right|\leqslant\left|Ax^2+Bx+C\right|$ испуњена за свако $x\in\mathbb{R}$ акко важи $ax^2+bx+c\leqslant Ax^2+Bx+C$ и $-\left(ax^2+bx+c\right)\leqslant Ax^2+Bx+C$ за свако $x\in\mathbb{R}$, односно акко важи

$$(A-a)x^2+(B-b)x+(C-c)\geqslant 0\quad\text{и}\quad(A+a)x^2+(B+b)x+(C+c)\geqslant 0\,,$$

тј. акко $(B-b)^2-4(A-a)(C-c)\leqslant 0$ и $(B+b)^2-4(A+a)(C+c)\leqslant 0$. Сабирањем претходних неједнакости, добија се $b^2-4ac\leqslant 4AC-B^2$.

Како претходна три случаја генеришу све могућности, овим је тражено тврђење доказано.

2. Нека су E, F, G средишта дужи AB, BC, DA, редом. Како је $\frac{MT_1}{ME}=\frac{MT_2}{MF}=\frac{2}{3}$ и $\sphericalangle T_1MT_2=\sphericalangle EMF$, следи да је $\triangle T_1MT_2\sim\triangle EMF$, па је $T_1T_2\parallel EF$. Аналогно се доказује да је $T_1T_3\parallel EG$, па како је $EF\parallel AC$, $EG\parallel BD$ и $AC\perp BD$, следи $T_1T_2\perp T_1T_3$. Дакле, $\triangle T_1T_2T_3$ је правоугли ($\sphericalangle T_3T_1T_2=90^\circ$), па је центар његове описане кружнице средиште дужи T_2T_3. Нека је O центар квадрата $ABCD$. Из претходног и представљања тежишта троугла преко вектора положаја темена, следи



$$\begin{aligned}(1)\qquad \overrightarrow{OO_M}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}\right)=\\&=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}\right)\right]=\\&=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OM}\,.\end{aligned}$$

Нека је $A_0B_0C_0D_0$ слика квадрата $ABCD$ хомотетијом са центром у O и коефицијентом $\frac{1}{3}$ (то ће бити квадрат 3 пута мање странице, са центром O и страницама паралелним страницама квадрата $ABCD$). Како се тачка M налази унутар квадрата $ABCD$, њена слика ће се уоченом хомотетијом наћи унутар квадрата $A_0B_0C_0D_0$ (из (1) следи да се тачка M пресликава у тачку O_M).

Са друге стране, ако је O' унутрашња тачка квадрата $A_0B_0C_0D_0$, нека је тачка M таква да је $\overrightarrow{OM} = 3 \cdot \overrightarrow{OO'}$. Тачка M је унутрашња тачка квадрата $ABCD$ и индукује тачку O_M за коју важи (1). Следи $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_M}$, па се тачке O' и O_M поклапају. Следи да је свака унутрашња тачка (O') квадрата $A_0B_0C_0D_0$ и индукована тачка O_M за неку тачку M из унутрашњости квадрата $ABCD$.

Дакле, тражено геометријско место тачака је унутрашњост квадрата који се добија као хомотетична слика квадрата $ABCD$, хомотетијом са центром O и коефицијентом $\frac{1}{3}$.

3. Како је $S(x) \cap S(y) = \emptyset$ ако и само ако једначина $x^n + x + 1 = y^m + y + 1$ нема решења у скупу природних бројева различитих од 1, треба одредити различите узајамно просте бројеве x и y, такве да дата једначина нема решења. Како су x и y различити, то бројеви n и m не могу у исто време бити парни, јер се тада број $x^n + x + 1$ разликује за $x + 1$ од најближег потпуног квадрата (јер је $n \geqslant 2$), а број $y^m + y + 1$ разликује за $y + 1$ од најближег потпуног квадрата, па бројеви $x^n + x + 1$ и $y^m + y + 1$ нису једнаки. Значи бар један од бројева n и m мора бити непаран, нпр. n. Уколико дата једначина има решења, мора бити $x(x^{n-1} + 1) = y(y^{m-1} + 1)$, што је немогуће уколико нпр. постоји делилац број y који није делилац број x и који је облика $4k + 3$ (јер број -1 није квадратни остатак по модулу броја облика $4k + 3$). Значи, за x и y се могу узети различити прости бројеви облика $4k + 3$, а за тражени скуп се може узети баш скуп свих простих бројева облика $4k + 3$. Овај скуп је бесконачан, па према претходном задовољава све услове задатка (тј. одговор на питање из задатка је позитиван).

Друго решење. Нека су x и y природни бројеви, такви да је $3 \leqslant x < y$ и $y \equiv 1 \pmod{x}$. Тада је $1 \equiv x^n + x + 1 = y^m + y + 1 \equiv 3 \pmod{x}$, па $x \mid (3 - 1) = 2$, што је немогуће ($x \geqslant 3$).

Скуп A се може конструисати индуктивно. Нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a_1 = 3$. За $a_1, \ldots, a_n \in A$, по кинеској теореми о остацима, постоји x за који важи $x \equiv 1 \pmod{a_i}$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ (јер су по претпоставци бројеви a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, по паровима узајамно прости). Међутим, такви су и бројеви $x + k \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ за свако $k \in \mathbb{Z}$. Нека је a_{n+1} један од таквих бројева који је већи од a_n.

По конструкцији је $(a_i, a_j) = 1$ за све $i \neq j$, а према горњем разматрању једначина $a_i^n + a_i + 1 = a_j^m + a_j + 1$ нема решења (јер за $i < j$ важи $a_j \equiv 1 \pmod{a_i}$), тј. важи $S(a_i) \cap S(a_j) = \emptyset$ за све $i \neq j$.

4. Нека су L и D крајњи леви и крајњи десни новчић. Како се парност броја новчића окренутих главом нагоре не мења, не може се доћи до ситуације да остане два новчића од којих је један окренут писмом, а други главом нагоре. Доказаћемо индукцијом по n да се игра може завршити само за $n \equiv 0 \pmod 3$ и $n \equiv 2 \pmod 3$ и да ће у првом случају L и D бити окренути главом, а у другом писмом нагоре.

Тврђење је тачно $n = 2, 3$. Нека се за неко n може завршити игра и нека је k позиција новчића X (бројећи с лева) који би при том последњи био уклоњен. Завршавајући игру са n жетона, завршавају се и игре са k жетона од L до X, и са $n - k + 1$ жетона од X до D (укључујући и њих). Тако ће пре уклањања новчића X са горње стране L бити глава (односно писмо) акко $k \equiv 0 \pmod 3$ (односно $k \equiv 2 \pmod 3$), док ће са горње стране D бити глава (писмо) акко $n - k + 1 \equiv 0 \pmod 3$ ($n - k + 1 \equiv 2 \pmod 3$)). Уклањање новчића X ће окренути L и D. Према томе, у завршној позицији ће на горњим странама L и D бити писмо акко $k \equiv n - k + 1 \equiv 0 \pmod 3$, одакле је $n \equiv 2 \pmod 3$, а глава акко $k \equiv n - k + 1 \equiv 2$

$\pmod 3$, одакле је $n \equiv 0 \pmod 3$.
Са друге стране, уклањањем редом другог, четвртог и трећег новчића слева (тим редом) игра са n новчића се своди на игру са $n-3$ новчића, па се игре са $n \equiv 0 \pmod 3$ и $n \equiv 2 \pmod 3$ завршавају.

Друго решење. Задатак се може решити тако што се сваком новчићу окренутом писмом нагоре са t новчића окренутих главом нагоре лево од њега додели број $(-1)^t$; показује се да је збир ових бројева по модулу 3 инваријантан (нека је то S; треба проверити 4 могућности за распоред новчића који се налазе око новчића који се уклања: П-П, П-Г, Г-П, Г-Г). Како је парност броја новчића окренутих главом нагоре инваријантна, ако се игра завршава, мора се доћи или до ситуације да су последња два новчића окренута писмом нагоре (тада је $S = 2$, тј. $n \equiv 2 \pmod 3$) или до ситуације да су последња два новчића окренута главом нагоре (тада је $S = 0$, тј. $n \equiv 0 \pmod 3$).
Да се у овим ситуацијама игра завршава, доказује се као у првом решењу.

Трећи и четврти разред

1. Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског следи

$$\left(\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\right)\big(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y)\big) \geqslant (x+y+z)^2,$$

па је довољно доказати да је $4(x+y+z)^2 \geqslant 9(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))$, тј. после сређивања

$$4(x^2+y^2+z^2) \geqslant xy+yz+zx+9(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Како је $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, довољно је доказати да је

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 3(xy^2+yz^2+zx^2)\,.$$

Како је $x^2\cdot 1 = x^2(x+y+z) = x^3+x^2y+x^2z$ и слично за y и z, сабирањем неједнакости $x(x^2+z^2) \geqslant 2x^2z$, $y(x^2+y^2) \geqslant 2xy^2$, $z(z^2+y^2) \geqslant 2z^2y$ (које су последица неједнакости између аритметичке и геометријске средине) добија се тражена неједнакост.
Да би важила једнакост, потребно је да $x=y=z$, па како је $x+y+z=1$, следи да неједнакост важи ако и само ако је $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2. Дата једначина је еквивалентна са

$$(*) \qquad xy(q-p) = pq(x+y),$$

односно са $[(q-p)x-pq]\cdot[(q-p)y-pq] = p^2q^2$. Како је

$$A = (q-p)x-pq = pqx\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{x}\right) = \frac{pqx}{y} > 0,$$

следи $(q-p)x-pq, (q-p)x-pq \in \mathbb{N}$ и $y = \dfrac{pqx}{A}$. Како су p и q прости бројеви, може се десити једна од следећих ситуација:

(1) Ако је $A=1$, следи $y=pqx$, па се уврштавањем у $(*)$ добија $x=\dfrac{pq+1}{q-p}$. Ово даје решења ако $(q-p)\mid(pq+1)$ и то су уређени парови $\left(\dfrac{pq+1}{q-p},\dfrac{pq(pq+1)}{q-p}\right)$.

Ситуација $A=p^2q^2$ је симетрична датој (полазна једначина је симетрична по x и y), па се одавде, при истом услову, добијају решења $\left(\dfrac{pq(pq+1)}{q-p},\dfrac{pq+1}{q-p}\right)$.

(2) Ако је $A=p$, следи $y=qx$, па се уврштавањем у $(*)$ добија $x=\dfrac{p(q+1)}{q-p}$. Ово даје решења ако $(q-p)\mid p(q+1)$, тј. пошто је $(p,q-p)=1$ ако $(q-p)\mid(q+1)$, и то су уређени парови $\left(\dfrac{p(q+1)}{q-p},\dfrac{pq(q+1)}{q-p}\right)$.

Ситуација $A=pq^2$ је симетрична датој (полазна једначина је симетрична по x и y), па се одавде, при истом услову, добијају решења $\left(\dfrac{pq(q+1)}{q-p},\dfrac{p(q+1)}{q-p}\right)$.

(3) Ако је $A=q$, следи $y=px$, па се уврштавањем у $(*)$ добија $x=\dfrac{q(p+1)}{q-p}$. Ово даје решења ако $(q-p)\mid q(p+1)$, тј. пошто је $(q,q-p)=1$ ако $(q-p)\mid(p+1)$, и то су уређени парови $\left(\dfrac{q(p+1)}{q-p},\dfrac{pq(p+1)}{q-p}\right)$.

Ситуација $A=p^2q$ је симетрична датој (полазна једначина је симетрична по x и y), па се одавде, при истом услову, добијају решења $\left(\dfrac{pq(p+1)}{q-p},\dfrac{q(p+1)}{q-p}\right)$.

(4) Ако је $A=p^2$, следи $y=\dfrac{qx}{p}$, па се уврштавањем у $(*)$ добија $x=\dfrac{p(p+q)}{q-p}$. Ово даје решења ако $(q-p)\mid(p+q)$, тј. пошто је $(p,q-p)=1$ ако $(q-p)\mid(p+q)$, и то су уређени парови $\left(\dfrac{p(p+q)}{q-p},\dfrac{q(p+q)}{q-p}\right)$.

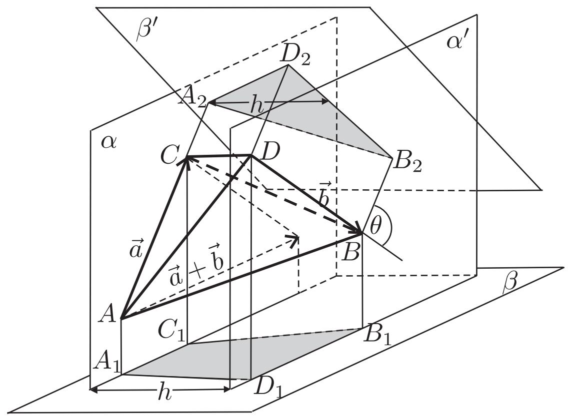
Ситуација $A=q^2$ је симетрична датој (полазна једначина је симетрична по x и y), па се одавде, при истом услову, добијају решења $\left(\dfrac{q(p+q)}{q-p},\dfrac{p(p+q)}{q-p}\right)$.

(5) Ако је $A=pq$, следи $y=x$, па се уврштавањем у $(*)$ добија $x=\dfrac{2pq}{q-p}$. Ово даје решења ако $(q-p)\mid 2pq$, тј. пошто је $(pq,q-p)=1$ ако $(q-p)\in\{1,2\}$, и то су уређени парови $\left(\dfrac{2pq}{q-p},\dfrac{2pq}{q-p}\right)$ (односно за $p=2,q=3$ даје решење $x=y=6$, а за просте p и $q=p+2$ даје решење $x=y=pq$).

3. Нека је $ABCD$ дати тетраедар, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|=a$, $|\overrightarrow{b}|=b$, $a\geqslant b$ (види слику) и нека угао између вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ није оштар (у супротном словима B и D можемо заменити места) и нека је једнак θ.

Уочимо две паралелне равни α и α' које садрже мимоилазне праве AC и BD. Нека је растојање између њих h.

Равни које се у задатку траже тражићемо међу равнима нормалним на α. Поставимо нормално на раван α раван β, која је и паралелна вектору $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. Такође, поставимо раван β' нормалну на раван α и вектор $\overrightarrow{a}$.
Докажимо да су β и β' тражене равни.



Пројекција тетраедра на раван β је трапез $A_1D_1B_1C_1$ са основицама A_1C_1 и D_1B_1 и висином h, при чему је $|A_1C_1|+|D_1B_1|=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$. Тада је

$$P_{A_1D_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\left(|A_1C_1|+|D_1B_1|\right)\cdot h=\frac{1}{2}h\cdot|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|.$$

Пројекција тетраедра на раван β' је $\triangle A_2B_2D_2$, чија је површина

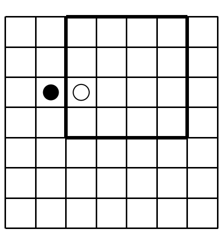
$$P_{A_2B_2D_2}=\frac{1}{2}h\cdot|B_2D_2|=\frac{1}{2}h\cdot b\sin\theta.$$

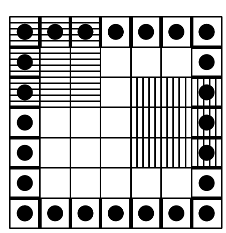
Коначно, имамо да је

$$\frac{P_{A_1D_1B_1C_1}}{P_{A_1B_2D_2}}=\frac{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|}{b\sin\theta}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\theta)}}{b\sin\theta}=$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}{b\sin\theta}\geqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b\sin\theta}\geqslant\frac{\sqrt{2b^2}}{b\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}\geqslant\sqrt{2},$$

што је и требало доказати.

4. Сваки од квадрата који Ђорђе уочи одређује неки подскуп поља дате таблице. Такође, за фамилију скупова које Ђорђе уочи, сваки елемент таблице одређује фамилију подскупова из уочене фамилије. Да би Ђорђе могао да одреди распоред елемената, потребно је да различитим елементима одговарају различите подфамилије, односно да за свака два елемента постоји подскуп у уоченој фамилији који садржи један од њих, а не садржи други.





Фамилија подскупова која је одређена са 12 квадрата 4×4 који належу бар једном својом ивицом на ивицу полазног квадрата је довољна (нпр. централни квадрат припада свим подскуповима, угаони само по једном, итд.). Наиме, по претходном и због симетрије је довољно показати да се произвољна два поља из „горњег-левог“ квадрата 4×4 могу „раздвојити“ (иначе су „раздвојени“ управо са њим). Та два елемента не припадају било истој врсти, било истој колони, па је јасно да се ово може учинити (на првој слици је показано како се „раздвајају“ поља на којима су празан и пун жетон–она припадају различитим колонама, па је уочен квадрат 4×4 који ивицом „раздваја“ те колоне).

Са друге стране уочена фамилија мора да „раздвоји“ ивична поља табле (тј. поља са друге слике на којима се налазе жетони). Дакле, за сваку од подебљаних линија са слике (те линије „раздвајају“ уочена поља и има их 24) мора у уоченој фамилији постојати квадрат који је садржи. Међутим, такав квадрат може садржати највише две такве линије (могуће су само ситуације које одговарају шрафираним квадратима са слике), па уочена фамилија мора имати бар 12 елемената.

Дакле, Ђорђу је потребно 12 питања да открије распоред бројева који је Милош замислио (и довољно, ако нпр. изабере горе наведена питања).

Мала олимпијада

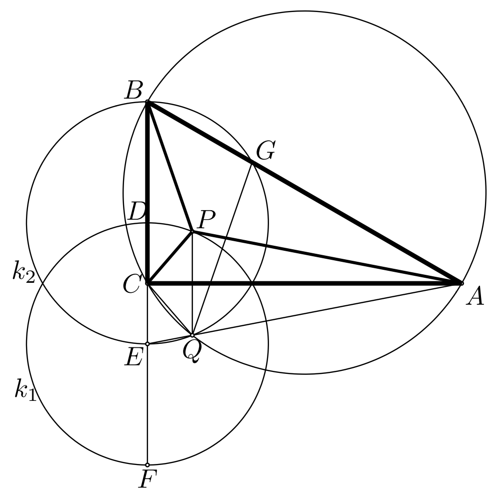
1. Ако је $1 \in A$ и $x \in B$ (такво x постоји, јер је $B \neq \emptyset$), тада је $x = 1 \cdot x \in A$ (по (3)), што је контрадикција. Следи $1 \in B$. Како је $6 + 7 = 13 \in A$, из (2) следи да је или $6, 7 \in A$ или $6, 7 \in B$. Ако је $6, 7 \in A$, како је $1 \in B$, по (2) следи $7 = 1 + 6 \in A$, што је контрадикција. Аналогно, коришћењем веза $3 + 10 = 13$, $5 + 8 = 13$, $4 + 9 = 13$, $2 + 11 = 13$, редом, утврђује се да су сви бројеви мањи од 13 у скупу B. Сада се индукцијом лако показује да су сви елементи скупа S који нису дељиви са 13 у скупу B (горе је утврђена база; ако је $13k + r \in B$, за $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant r \leqslant 12$ и ако је $13(k+1) \in S$, тада је, по (2), $13(k+1) = 13k + 13 \in B$).
Дакле, треба јеш разврстати по скуповима бројеве из S који су дељиви са 13. Ако су неки бројеви дељиви са 13 у скупу B, тада међу њима постоји најмањи. Нека је то број $13k$ $(2 \leqslant k \leqslant \left[\frac{2006}{13}\right] = 154)$. Индукцијом (као и горе), следи да су тада и бројеви $13m$ $(k \leqslant m \leqslant 154)$ у скупу B, па је и $13 \cdot 154 \in B$. Међутим, како $13 \nmid 154$, по (3), како је $13 \in A$, $154 \in B$, следи $13 \cdot 154 \in A$, што је контрадикција *.
Дакле, у скупу A се налазе сви бројеви из S дељиви са 13 (и само они), па је $|A| = 154$.

Друго решење. Као и у првом решењу, утврђује се да је $1 \in B$. Ако нису сви бројеви мањи од 13 у скупу B, тада међу њима постоји најмањи који је у скупу A. Нека је то број r. Индукцијом, следи да су бројеви $1 + kr$ $(1 \leqslant k \leqslant 13)$ у скупу B. Како је $(r, 13) = 1$, горњи бројеви чине потпун систем остатака при дељењу са 13, па међу њима постоји број дељив са 13. Притом то није број $1 + 13r$.
Дакле, за неко $1 \leqslant k \leqslant 12$ важи $1 + kr = 13 \cdot n$, па је $n = \frac{1+kr}{13} \leqslant \frac{1+12r}{13} < r$. Следи $n \in B$, па је $1 + kr = 13n \in A$, што је контрадикција.
Код одређивања скупа A, први (а ако се отклони и једини) проблем настаје код броја $169 = 13^2$ (сви бројеви дељиви са 13 мањи од њега су производ броја 13 и неког броја за који се већ зна да је у скупу B). Међутим, ако би било $13 \cdot 13 \in B$, тада би било и $14 \cdot 13 = 13 \cdot 13 + 13 \in B$ (по (2)), а са друге стране $13 \cdot 14 \in A$ (по (3), јер је $13 \in A$, $14 \in B$).

*(тј. да $13 \nmid 154$ је кључ задатка; ову чињеницу је савезна комисија бодовала са 7 поена)

Дакле, $13, 13^2 \in A$, па како је $13^3 > 2006$, сви бројеви дељиви са 13 у скупу S су или облика $13n$ или облика $13^2 n$, где $13 \nmid n$, одакле следи да су сви бројеви дељиви са 13 у скупу A.

2. Нека је $AB = c$ и $BC = a$. Нека су тачке D, E и F на полуправој BC, такве да је $BD = \dfrac{2}{3}a$, $BE = \dfrac{4}{3}a$ и $BF = 2a$. Како је $BP : PC = 2 : 1$, то тачка P припада кружници k_1, где је $k_1\left(E, \frac{2}{3}a\right)$. Како је тачка Q симетрична тачки P у односу на AC, она припада кружници k_2, где је $k_2\left(D, \frac{2}{3}a\right)$, која је симетрична кружници k_1 у односу на AC. Како је $\sphericalangle BQE = 90^\circ$, као угао над пречником BE кружнице k_2, и како је $BQA = 90^\circ$, следи да су тачке E, Q и A колинеарне. Нека је G пресечна тачку кружнице k_2 и хипотенузе AB (различита од B). Из симетрије тачака P и Q у односу на AC, следи $AQ = 4$ и $CQ = 1$.
Из тетивности четвороугла $ABCQ$ следи да је $\sphericalangle BAQ = 180^\circ - \sphericalangle BCQ = \sphericalangle ECQ$. Слично, из тетивности четвороугла $BEQG$, следи $\sphericalangle BEQ = 180^\circ - \sphericalangle BGQ = \sphericalangle AGQ$. Дакле, важи $\triangle EQC \sim \triangle GQA$. Из наведене сличности следи $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{AG}{CE}$, па је $AG = \frac{4}{3}a$. Из $\triangle BEG \sim \triangle BAC$ следи $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BG}{BC}$, па је $BG = \dfrac{4a^2}{3c}$. Из $AB = AG + GB$, односно $c = \dfrac{4}{3}a + \dfrac{4a^2}{3c}$, добија се $c = 2a$.
Коначно, из $AB = 2BC$ и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, добија се $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.



Друго решење. Нека је $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACP = \delta$. Како је четвороугао $ABCQ$ тетиван, а тачке B и Q се налазе са различитих страна праве AB, то је $\sphericalangle AQC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 180^\circ - \beta$. Одатле и из подударности троуглова $\triangle APC$ и $\triangle AQC$ следи $\sphericalangle AQC = \sphericalangle APC = 180^\circ - \beta$. Применом синусне теореме на троугао $\triangle APC$ добија се $\dfrac{4}{\sin\delta} = \dfrac{b}{\sin(180^\circ - \beta)}$, односно

(1) $$\sin\delta = \frac{4\sin\beta}{b}.$$

Применом косинусне теореме на исти троугао добија се

$$b^2 = 1^2 + 4^2 - 8\cos(180^\circ - \beta) = 17 + 8\cos\beta. \tag{2}$$

Из косинусне теореме за троугао $\triangle BCP$, како је $a = \dfrac{b}{\operatorname{tg}\beta}$ и (1), следи

$$\begin{aligned} 2^2 &= a^2 + 1^2 - 2a\cos(90^\circ - \delta) = a^2 + 1^2 - 2a\sin\delta \\ &= \left(\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + 1 - 2\cdot\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{4\sin\beta}{b} = \left(\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + 1 - 8\cos\beta\,, \end{aligned}$$

односно

$$b^2 = \operatorname{tg}^2\beta\,(3 + 8\cos\beta) = \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot(3 + 8\cos\beta)\,. \tag{3}$$

Из (2) и (3) добија се једначина

$$17 + 8\cos\beta = \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot(3 + 8\cos\beta)\,,$$

која се после смене $x = \cos\beta$ и сређивања своди на $16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0$. Једно њено решење је $x = \frac{1}{2}$, па следи

$$16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 16\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right),$$

те су њена решења и $x = -\frac{1}{4}$ и $x = -\frac{3}{2}$. Како је $x = \cos\beta$ и $\beta < 90^\circ$, мора бити $\cos\beta = \frac{1}{2}$, па је $\dfrac{CB}{BA} = \cos\beta = \dfrac{1}{2}$, односно $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Напомена. Задатак се може решити и ако се примети да је P Торичелијева тачка $\triangle ABC$.

3. Нека је $S_p(n)$, где је p прост, а n природан број, највећи ненегативан цео број r за који $p^r \mid n!$ (скраћено $p^r \parallel n!$). Тада је

$$S_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots\,.$$

Ако је $k = p^\alpha$, где је p прост, а α природан број, како $k \mid \binom{n}{1}$, то се број n може записати у облику $p^\beta r$, где је $\beta \geqslant \alpha$ и $(p,r) = 1$. Посматрајмо биномни коефицијент $\binom{n}{p^\beta}$. Ако је $r > 1$, тада је

$$\begin{aligned} S_p(n) - S_p\left(p^\beta\right) - S_p\left((r-1)p^\beta\right) &= \left(\left[\frac{p^\beta r}{p}\right] - \left[\frac{p^\beta}{p}\right] - \left[\frac{p^\beta(r-1)}{p}\right]\right) \\ &+ \left(\left[\frac{p^\beta r}{p^2}\right] - \left[\frac{p^\beta}{p^2}\right] - \left[\frac{p^\beta(r-1)}{p^2}\right]\right) + \cdots + \left(\left[\frac{p^\beta r}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^\beta}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^\beta(r-1)}{p^\beta}\right]\right) \\ &+ \left(S_p(r) - S_p(1) - S_p(r-1)\right) = S_p(r) - S_p(r-1) = 0, \end{aligned}$$

тј. $p \nmid \binom{n}{p^\beta}$. Следи да за уочено k мора бити $r = 1$, односно $n = p^\beta$ (дакле, за овакво k, n сме имати само један прост делилац и то баш p).
Нека је $\alpha > 1$. По горњем разматрању је $n = p^\beta$, па је

$$\begin{aligned} S_p\left(p^\beta\right) - S_p\left(p^{\beta-1}\right) - S_p\left(p^{\beta-1}(p-1)\right) &= \left(\left[\frac{p^\beta}{p}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}}{p}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p}\right]\right) \\ +\left(\left[\frac{p^\beta}{p^2}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}}{p^2}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^2}\right]\right) &+ \cdots + \left(\left[\frac{p^\beta}{p^{\beta-1}}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}}{p^{\beta-1}}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta-1}}\right]\right) \\ +\left(\left[\frac{p^\beta}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^\beta}\right]\right) &= 1\,, \end{aligned}$$

тј. $p^2 \nmid \binom{p^\beta}{p^{\beta-1}}$. Дакле, $p^\alpha \nmid \binom{p^\beta}{p^{\beta-1}}$.
Нека је $\alpha = 1$. По горњем разматрању је $n = p^\beta$. Нека је $1 \leqslant i \leqslant p^\beta - 1$. Тада је

$$\begin{aligned} S_p\left(p^b\right) - S_p(i) - S_p\left(p^b - i\right) &= \left(\left[\frac{p^\beta}{p}\right] - \left[\frac{i}{p}\right] - \left[\frac{p^\beta - i}{p}\right]\right) \\ +\left(\left[\frac{p^\beta}{p^2}\right] - \left[\frac{i}{p^2}\right] - \left[\frac{p^\beta - i}{p^2}\right]\right) &+ \cdots + \left(\left[\frac{p^\beta}{p^{\beta-1}}\right] - \left[\frac{i}{p^{\beta-1}}\right] - \left[\frac{p^\beta - i}{p^{\beta-1}}\right]\right) \\ +\left(\left[\frac{p^\beta}{p^\beta}\right] - \left[\frac{i}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^\beta - i}{p^\beta}\right]\right) &\geqslant \left(\left[\frac{p^\beta}{p^\beta}\right] - \left[\frac{i}{p^\beta}\right] - \left[\frac{p^\beta - i}{p^\beta}\right]\right) = 1\,, \end{aligned}$$

па следи да $p \mid \binom{p^\beta}{i}$ за свако i $(1 \leqslant i \leqslant p^\beta - 1)$.
Следи, за $k = p^\alpha$ не постоји тражено n за $\alpha > 1$, односно за $\alpha = 1$ тражени бројеви n су сви бројеви облика $n = p^\beta$, $\beta \geqslant 1$
Уколико број k није облика p^α, онда постоје прости бројеви p и q који га деле. Међутим, из $p \mid \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$, односно $q \mid \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$, на основу разматраног следи да број n мора бити степен и простог броја p и простог броја q, што је немогуће.
Дакле, сва решења (тј. уређени парови (k, n)) су облика $\left(p, p^\beta\right)$, где је p прост број, а $\beta \in \mathbb{N}$.

Друго решење. Баратање са $S_p(n)$ се може избећи. Нека $p^\alpha \parallel k$. Из $k \mid \binom{n}{k}$, следи $n = p^\beta r$, где је $\beta \geqslant \alpha$, $(r, p) = 1$. Ако је $r > 1$, тада је

$$\binom{n}{p^\beta} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - p^\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p^\beta}.$$

Како је $p^t \parallel i \Leftrightarrow p^t \parallel n - i = p^\beta r - i$, за $1 \leqslant i \leqslant p^\beta - 1$ (јер за те бројеве је $t < \beta$), следи да $p \nmid \binom{n}{p^\beta}$, тј. n и k не смеју имати више од једног простог делиоца.
Аналогним разматрањем се одбацује и ситуација $\alpha > 1$ и долази до решења.

* * *