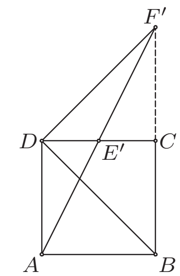
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је F' пресек нормале у тачки D на праву BD и праве BC, и E' пресек правих AF' и CD. Тада је $\sphericalangle F'DC = \sphericalangle F'DB - \sphericalangle CDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ и $\sphericalangle DCF' = 90^\circ$, па је $\sphericalangle DF'C = 45^\circ$ и $\triangle DCF'$ је једнакокракоправоугли. Како је $AD \parallel BC$, то је $\sphericalangle DAE' = \sphericalangle E'F'C$, па из $DA = DC = CF'$ и $\sphericalangle ADE' = \sphericalangle E'CF' = 90^\circ$ закључујемо да је $\triangle DAE' \cong \triangle CF'E'$. Сада је $DE' = E'C$, па је $E \equiv E'$ и самим тим $F' \equiv F$, чиме је доказ завршен. (Тангента 62, стр. 40, Писмени задаци, задатак 2)



ОП 2012, 1А – 1

2. Означимо са p, q и r следеће исказе:

p : Биће облачно. q : Падаће снег. r : Дуваће ветар.

Тада тврђењима 1), 2) и 3) из поставке задатка одговарају респективно следеће исказне формуле:

$$F_1 \equiv p \vee q \vee r, \qquad F_2 \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r, \qquad F_3 \equiv \neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q).$$

Треба проверити да ли је исказна формула $F \equiv q \Rightarrow r$ логичка последица формула F_1, F_2 и F_3, односно да ли је формула $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \Rightarrow F$ таутологија. Доказаћемо да је формула

$$(p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

таутологија методом свођења на апсурд (могуће је и цртањем таблице).

Претпоставимо да претходна формула није таутологија, односно да постоје вредности исказних слова p, q, r за које је $\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \perp$. Тада је

$$\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q))) = \top, \qquad \tau((q \Rightarrow r)) = \perp.$$

Сада је из друге формуле $\tau(q) = \top$ и $\tau(r) = \perp$. Даље, како је из прве формуле $\tau(\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) = \top$, то је према претходном $\tau(p \wedge \neg q) = \top$, односно $\tau(\neg q) = \top$. Контрадикција! (Тангента 65, стр. 18, Наградни задаци, задатак М964)

3. Ако је $d \in \mathbb{N}$ делилац броја n, онда је и $\frac{n}{d}$ делилац броја n. Притом, је $d = \frac{n}{d}$ ако и само ако је n потпун квадрат и $d = \sqrt{n}$. Дакле, ако n није потпун квадрат, делиоци броја n се могу поделити на двочлане скупове облика $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$. Ако је n потпун квадрат, исто се може урадити са свим делиоцима броја n, сем $\sqrt{n}$. Следи да је број делиоца броја n непаран ако и само ако је n потпун квадрат. Како су n и n^3 или оба потпуни квадрати или оба нису потпуни квадрати, бројеви њихових делилаца су исте парности, па се не могу разликовати за 2011, односно једначина нема решења.

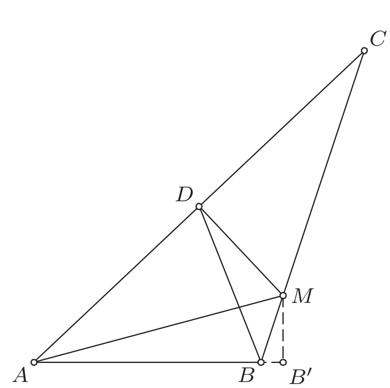
4. Нека је D средиште странице AC, а M тачка на правој BC таква да је $MD \perp AC$. По услову задатка $\triangle ABD$ је једнакокраки, те је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD < 90^\circ$, па се тачка M налази на страници BC. Како се тежишна дуж и висина из темена D троугла AMC поклапају, то је он једнакокраки, па је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \sphericalangle BCA$. Из услова задатка је $\sphericalangle ABM > 90^\circ$ и $\sphericalangle ADM = 90^\circ$, па је

$$\sphericalangle DBM = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD > \sphericalangle ADM - \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDM,$$

односно $MD > BM$. Нека је B' подножје нормале из тачке M на праву AB. Тада из правоуглог троугла $BB'M$ закључујемо $MB' < BM$, па је $MB' < DM$. Како је у троугловима AMB' и AMD испуњено $AM = AM$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle AB'M = 90^\circ$ и $MB' < DM$, то је $\sphericalangle MAD > \sphericalangle B'AM = \sphericalangle BAM$, и самим тим

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle MAC > \sphericalangle BAM = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BCA,$$

што је и требало доказати.



ОП 2012, 1А – 4

5. Претпоставимо да је могуће поставити 7 ловаца тако да нападају сва поља шаховске табле. Посматрајмо рубна поља шаховске табле, тј. поља уз ивицу табле. Оваквих поља има 28, од којих је 14 бело и 14 црно. Приметимо да један ловац напада поља исте боје, па постоји боја таква да су рубна поља те боје нападнута од стране највише три ловца - нека је то црна боја. Међутим, сваки ловац напада највише 4 рубна поља, тако да је нападнуто највише 12 рубних поља црне боје, контрадикција.

Осам ловаца постављених у поља четврте колоне табле нападају сва поља, чиме је доказ у потпуности завршен.

Други разред, А категорија

1. Сабирањем датих једначина добијамо

$$169 = x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2,$$

па је $x + 2y = \pm 13$.

Први случај. Ако је $x+2y = 13$, тада је $x = 13-2y$, па заменом у прву једначину добијамо $2y^2+13y-115 = 0$, чија су решења $y = 5$ и $y = -\frac{23}{2}$. Дакле, у овом случају решења су парови $(3, 5)$ и $\left(36, -\frac{23}{2}\right)$.

Други случај. Ако је $x+2y = -13$, тада је $x = -13-2y$, па заменом у прву једначину добијамо $2y^2-13y-115 = 0$, чија су решења $y = -5$ и $y = \frac{23}{2}$. Дакле, у ово случају решења су парови $(-3, -5)$ и $\left(-36, \frac{23}{2}\right)$.

Решења једначине су парови $(3, 5)$, $(-3, -5)$, $\left(36, -\frac{23}{2}\right)$ и $\left(-36, \frac{23}{2}\right)$. (Тангента 58, стр. 29, Писмени задаци, задатак 4)

2. Постоје реални бројеви α, β, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ тако да је $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$ и $c = \operatorname{tg}\gamma$. Тада је

$$1 = \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma,$$

па је $\cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geqslant 2\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma} = 2|\sin\beta\sin\gamma|$ (последња неједнакост следи из А-Г неједнакости). Слично је $\cos^2\beta \geqslant 2|\sin\alpha\sin\gamma|$ и $\cos^2\gamma \geqslant 2|\sin\alpha\sin\beta|$. Множењем претходних неједнакости налазимо да је

$$\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma \geqslant 8\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma,$$

па је

$$\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta \cdot \operatorname{tg}^2\gamma \leqslant \frac{1}{8},$$

тј. $|\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$, односно $|abc| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Једнакост важи ако и само ако је $\sin^2\alpha = \sin^2\beta = \sin^2\gamma = \frac{1}{3}$, односно $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$.

Друго решење. Множењем датог услова са $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ добијамо да је он еквивалентан са

$$1 = 2a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Како је по А-Г неједнакости

$$1 = 2a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant 4\sqrt[4]{2a^2b^2c^2 \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2a^2} = 4\sqrt[4]{2a^6b^6c^6},$$

то је $|abc| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Једнакост важи ако и само ако је $2a^2b^2c^2 = a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$, односно $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$.

3. Како је $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$ и $\operatorname{ctg}\delta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}$, то је довољно доказати

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta,$$

односно

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta - 1) = -(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1). \tag{†}$$

Приметимо да је $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \vee \alpha + \beta = 270^\circ \Leftrightarrow \gamma + \delta = 270^\circ \vee \gamma + \delta = 90^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta = 1$, па је (†) довољно доказати у случају да је $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta$ различито од 1. Међутим, тада (†) следи из

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = -\frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta}.$$

(Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 1)

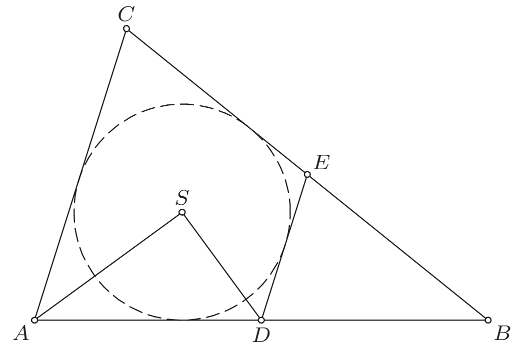
4. Нека је E тачка на страници BC таква да DE додирује уписани круг. Како је

$$\begin{aligned}\sphericalangle ADE+\sphericalangle DAC &= 2\cdot\sphericalangle ADS+2\cdot\sphericalangle DAS\\ &= 2\cdot(180^\circ-\sphericalangle ASD)=180^\circ,\end{aligned}$$

то је $DE\parallel AC$. Како је D средиште дужи AB, то је DE средња линија троугла ABC, па је $2\cdot CE=CB$. Како је четвороугао $ADEC$ тангентан, то је

$$\frac{3}{2}\cdot AC=AC+DE=AD+CE=\frac{1}{2}\cdot(AB+BC),$$

тј. $AB+BC=3AC$.



ОП 2012, 2А – 4

5. Докажимо да, ако је $m=n$, побеђује Други играч, а у супротном Први (Први играч је онај чијим потезом почиње игра).

Ако је $m=n$, Други играч у сваком свом потезу треба да „опонаша” потез Првог, тј. ако Први подели неку гомилу, он треба другу са истим бројем жетона да подели на исти начин. На тај начин после сваког потеза Другог број гомила је паран (нпр. $2k$), при чему су бројеви жетона на гомилама $x_1,x_1,x_2,x_2,\dots,x_k,x_k$ (другим речима, за сваки природан број l биће паран број гомила са по l жетона). Дакле, Други увек може да одигра потез, па како се игра завршава (после коначно много потеза), он има победничку стратегију.

Ако је, без умањења општости, $m>n$, Први треба да гомилу са m жетона подели на једну са n и $m-n$ гомила са по једним жетоном. Затим преузима стратегију Другог описану горе.

Трећи разред, А категорија

1. По Виетовим формулама важе једнакости $x_1+x_2+x_3=4$ и $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-a$, па је

$$0=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-4\cdot(x_1+x_2+x_3)+12=12+2a,$$

односно $a=-6$ је решење задатка. (Тангента 60, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5)

2. Изрази $\log_3(\operatorname{ctg}x)$ и $\log_2(\cos x)$ дефинисани су акко је $\operatorname{ctg}x>0$ и $\cos x>0$, односно за $x\in D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})$. Како су функције $\log_3(\operatorname{ctg}x)$ и $\log_2(\cos x)$ периодичне са заједничком периодом 2π, то је једначину довољно решити на интервалу $(0,\frac{\pi}{2})$. Нека је $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Тада је

$$2\log_3(\operatorname{ctg}x)=\log_2(\cos x)\quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot(\log_3(\cos x)-\log_3(\sin x))=\log_2(\cos x)\tag{1}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3}\cdot\log_2(\cos x)=\log_2(\sin x).\tag{2}$$

Посматрајмо функције $f,g:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, задате са

$$f(x)=\frac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3}\cdot\log_2(\cos x),\qquad g(x)=\log_2(\sin x).$$

Како је на посматраном интервалу функција $\cos x$ строго опадајућа, то је и функција $\log_2(\cos x)$ такође строго опадајућа (пошто је функција $\log_2 t$ строго растућа). Имајући још на уму да је $0<\log_2 3<2$, то је $\dfrac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3}>0$, те је функција $f(x)$ строго опадајућа. Слично овом закључујемо да је на посматраном интервалу функција $g(x)$ строго растућа. Због овога једначина (2) може имати највише једно решење. Заиста, ако је α неко решење те једначине, за $x>\alpha$ важи $f(x)<f(\alpha)=g(\alpha)<g(x)$, а за $x<\alpha$, $f(x)>f(\alpha)=g(\alpha)>g(x)$. Овим смо доказали да једначина (2), а тиме и (1), на интервалу $(0,\frac{\pi}{2})$ има највише једно решење. Како је

$$2\log_3(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3})=2\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-1,\qquad \log_2(\cos\frac{\pi}{3})=\log_2\frac{1}{2}=-1,$$

то је $x=\frac{\pi}{3}$ једино решење полазне једначине на интервалу $(0,\frac{\pi}{2})$.

Решења полазне једначине су $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, за све $k\in\mathbb{Z}$.

3. Докажимо да сваки од бројева $n=2\cdot 3^m$, $m\in\mathbb{N}$, задовољава дату једнакост. Заиста

$$\varphi(n)=\varphi(2\cdot 3^m)=\varphi(2)\cdot\varphi(3^m)=3^m-3^{m-1}=2\cdot 3^{m-1}=\frac{n}{3}.$$

Како бројева облика $2\cdot 3^m$ има бесконачно много, тврђење задатка је доказано. (Тангента 65, стр. 21, Наградни задаци, задатак М985)

4. Приметимо да, уколико уредимо странице шестоугла (заједно са кружним одсечцима који су налегли на њих), опет добијамо кружницу исте величине. Зато, довољно је одредити полупречник кружнице описане око шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ таквог да је $A_1A_2 = A_4A_5 = 2$, $A_2A_3 = A_5A_6 = 7$ и $A_3A_4 = A_6A_1 = 11$. Приметимо да је тада $A_1A_4 = D$ пречник круга, па применом Птоломејеве теореме на четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ добијамо

$$\sqrt{D^2-121}\cdot\sqrt{D^2-4} = A_1A_3\cdot A_2A_4 = A_1A_4\cdot A_2A_3 + A_1A_2\cdot A_3A_4 = 7D+22.$$

Квадрирањем претходног израза и сређивањем добијамо једначину $P(D) = D\cdot(D^3-174D-308) = 0$. Како је $P(D) = D\cdot(D-14)\cdot(D^2+14D+22)$, то је једино позитивно решење дате једначине $D = 14$. Како пречник дате кружнице мора да задовољава претходну једнакост, то је тражени полупречник једнак 7.

5. Довољно је размотрити следећа два случаја.

Први случај: $2\mid n$, тј. $n = 2k$, за неко $k\in\mathbb{N}$. Докажимо да је $m = k+1$. Наиме, у подскупу $\{2,4,\ldots,2k\}$ нема узајамно простих бројева. С друге стране, претпоставимо да $X\subseteq N_n$ има $k+1$ елемент. Поделимо све елементе из N_n у парове: 1 и 2, 3 и 4, итд. $2k-1$ и $2k$. Из бар једног пара су у скупу X оба броја, а они су узајамно прости.

Други случај: $2\nmid n$, тј. $n = 2k+1$, за неко $k\in\mathbb{N}$. Докажимо да је опет $m = k+1$. Слично као горе, у $\{2,4,\ldots,2k\}$ нема узајамно простих бројева. Нека $X\subseteq N_n$ има $k+1$ елемент. Поделимо све елементе из X осим јединице у парове: 2 и 3, 4 и 5, итд. $2k$ и $2k+1$. Сада, или у X имамо оба елемента из неког од парова, или је у X јединица која је узајамно проста са сваким другим елементом.

Дакле, најмањи број са датим својством је $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$.

Четврти разред, А категорија

1. Посматрајмо функцију $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дату са $g(x) = f(x)-x$, за $x\in\mathbb{R}$. Како је $g(0) = f(0)\geqslant 0$, $g(1) = f(1)-1\leqslant 0$ и g непрекидна функција, на интервалу $[0,1]$ постоји барем једно c такво да је $g(c) = 0$, односно $f(c) = c$. Претпоставимо да постоје барем два оваква броја, $x_1\neq x_2$. Тада, према Роловој теореми, постоји $\widetilde{x}\in(x_1,x_2)$ тако да је $g'(\widetilde{x}) = 0$. Међутим, како је $g'(x) = f'(x)-1$, за $x\in\mathbb{R}$, то је $f'(\widetilde{x}) = 1$, контрадикција. (Тангента 63, стр. 13, Наградни задаци, задатак M942)

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Нека су функције $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисане са

$$g(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\qquad h(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

за свако $x\in\mathbb{R}$. За парно n важи $g(-1) = h(-1)$, а за непарно n имамо $g(-1) = -h(-1)$. Зато (без обзира на парност броја n) важи $|g(-1)| = |h(-1)|$, те је $f(-1) = |g(-1)|-|h(-1)| = 0$. Пошто је $g(1) = h(1)$, важи и $f(1) = 0$. Са скице дате у задатку можемо уочити да функција f има тачно две нуле. Из претходног дела закључујемо да те нуле морају бити бројеви -1 и 1. Са скице такође уочавамо да је функција f позитивна на интервалу између својих нула, односно на интервалу $(-1,1)$. Отуда је $f(0)>0$, односно $|a_0|>|a_n|$. Како је $\lim_{x\to\infty}\frac{|g(x)|}{x^n} = |a_n|$ и $\lim_{x\to\infty}\frac{|h(x)|}{x^n} = |a_0|$, то је

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n} = |a_n|-|a_0|.$$

Сада, како је $|a_n|-|a_0|<0$, имамо да је $\lim_{x\to\infty}f(x) = -\infty$. Међутим, са скице имамо да је $\lim_{x\to\infty}f(x) = \infty$, чиме долазимо до контрадикције. Дакле, бројеви са наведеном особином не постоје.

3. Докажимо да мора бити $f(n) = n$ за све $n\in\mathbb{N}$. Претпоставимо супротно, и нека је m најмањи природан број такав да је $f(m)\neq m$. Тада је $f(m)>m$. Заиста, ако је $m = 1$ важи $f(m) = f(1)>1 = m$, а ако је $m>1$ и $f(m) = k<m$, имали бисмо $f(m) = f(k)$ и f не би била инјективна. Пошто је f бијекција, постоји $k\in\mathbb{N}$ такав да је $f(k) = m$. Јасно, $k>m$, па из услова задатка имамо $m+f(m)<(m+1)+f(m+1)<\ldots<k+f(k)$. Уз то, пошто је f инјективна, $f(m)$, $f(m+1)$, $\ldots$, $f(k-1)$ су различити и већи од m. Сада је, са једне стране,

$$(m+f(m))+\ldots+((k-1)+f(k-1))\geqslant(m+\ldots+(k-1))+((m+1)+\ldots+k) = k^2-m^2,$$

а са друге, из услова задатка,

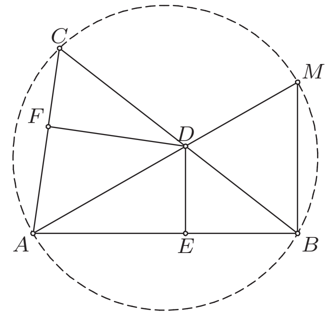
$$(m+f(m))+\ldots+((k-1)+f(k-1))<(k-m)(k+f(k)) = k^2-m^2.$$

Контрадикција. Дакле, $f(2012) = 2012$.

4. Како је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB$ (као углови над тетивом AB), то из правоуглог троугла ABM добијамо да је $\sphericalangle MAB = \sphericalangle DAE = 90^\circ - \sphericalangle ACB$, па у правоуглом троуглу ADE важи $AE = AD \cdot \sin\sphericalangle ACB$. Аналогно добијамо и $AF = AD \cdot \sin\sphericalangle ABC$. Из синусне теореме примењене на троугао ABC је $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin\sphericalangle ACB}{\sin\sphericalangle ABC}$, па је

$$\frac{AE}{AF} = \frac{\sin\sphericalangle ACB}{\sin\sphericalangle ABC} = \frac{AB}{AC},$$

и тврђење задатка следи из Талесове теореме. (Тангента 60, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2)



ОП 2012, 4А – 4

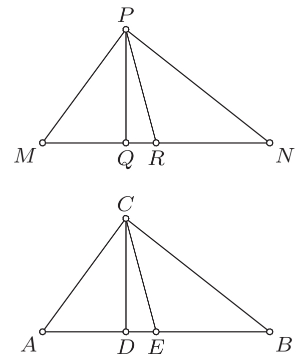
5. Приметимо да се k-тоцифрен (у бинарном запису) зао број може добити тако што на произвољан начин изаберемо $k-1$ цифру највеће тежине, а затим k-ту цифру тако да је укупан број јединица у запису паран. Самим тим, n-ти зао број је једнак $2n + x(n)$, где је $x(n)$ једнако 1 ако је број јединица у бинарном запису броја n непаран, и 0 у супротном. Такође, како је број јединица у бинарном запису броја $2n+1$ за један већи од броја јединица у бинарном запису броја $2n$, то је $x(2n+1) \neq x(2n)$, а самим тим и $x(2n+1) + x(2n) = 1$, за све $n \geqslant 1$. Како је $x(2012) = 0$ и $x(1) = 1$, то је тражени збир једнак

$$\sum_{n=1}^{2012} (2n + x(n)) = 2012 \cdot 2013 + 1005 + 1.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је $CD \cong PQ$, $CE \cong PR$ и $\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle PQR$, то је по ставу ССУ $\triangle CDE \cong \triangle PQR$ (оба троугла су правоугла), па је $\sphericalangle CED \cong \sphericalangle PRQ$. Претпоставимо да, без умањења општости, важе распореди $A-D-E$ и $M-Q-R$. Тада је $CE \cong PQ$, $AE \cong MR$ (као половине дужи AB, односно MN) и $\sphericalangle AEC \cong \sphericalangle MRP$, па је по ставу СУС $\triangle ACE \cong \triangle MPR$ и самим тим $AC \cong MP$. Како је $\sphericalangle CEB$ суплементаран $\sphericalangle AEC$, а $\sphericalangle PRN$ суплементаран $\sphericalangle PRM$, то је $\sphericalangle BEC \cong \sphericalangle NRP$, па аналогним разматрањем добијамо да је $\triangle CEB \cong \triangle PRN$, односно $CB \cong PN$. Сада, како је $AB \cong MN$, $AC \cong MP$ и $CB \cong PN$, то је по ставу ССС $\triangle ABC \cong \triangle MNP$. (Тангента 65, стр. 38, Писмени задаци, задатак 2)



ОП 2012, 1Б – 1

2. Нека су A, B, C, редом, скупови ученика који су решили први, други, трећи задатак, редом. Означимо са $x = |(A \cap B) \setminus C|$, $y = |(B \cap C) \setminus A|$, $z = |(A \cap C) \setminus B|$ бројеве ученика који су решили тачно два задатка, са $t = |A \cap B \cap C|$ број ученика који су решили сва три задатка и са u број ученика који су решили највише један задатак. Из услова задатка имамо $x + t = 6$, $y + t = 7$, $z + t = 11$ и $x + y + z + t + u = 21$. Одузимањем четврте једначине од збира прве три добијамо $2t = u + 3$. Одавде је очигледно $t \geqslant 2$ и $u \geqslant 1$ (јер је $u = 2t - 3$ непаран број). (Тангента 65, стр. 19, Наградни задаци, задатак М966)

3. Уколико обема странама дате једнакости додамо 1, добијамо $XY + X + Y + 1 = 60$, па је

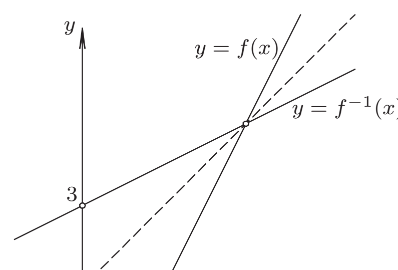
$$XY + X + Y + 1 = X(Y+1) + Y + 1 = (X+1)(Y+1) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Број различитих начина да одаберемо $X+1$ (чиме одређујемо и $Y+1$), је једнак броју различитих делиоца броја $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, што је $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Од ових 12 решења у пола је $X > Y$ (не могу бити једнаки, јер 60 није тачан квадрат), па нам остаје 6 решења. У једном од њих је $X + 1 = 1$, па и оно не задовољава услове задатка, тј. постоји 5 различитих решења. Она су: $(X, Y) \in \{(1, 29), (2, 19), (3, 14), (4, 11), (5, 10)\}$.

4. Уведимо смену $t = 3x - 1$, за $x \in \mathbb{R}$. Тада је $x = \dfrac{t+1}{3}$, па је

$$f(t) = 6x - 8 = 6 \cdot \frac{t+1}{3} - 8 = 2t - 6.$$

Дакле, $f(5) = 4$ и, уопште, $f(x) = 2x - 6$, за све $x \in \mathbb{R}$. Даље, ако је $f(x_1) = f(x_2)$, то је према претходном $2x_1 - 8 = 2x_2 - 8$, па је $x_1 = x_2$, и самим тим, функција f је 1-1. Графици функција $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ дати су на слици десно (график функције $y = f^{-1}(x)$ добијамо тако што график функције $y = f(x)$ пресликамо симетрично у односу на праву $y = x$). (Тангента 65, стр. 34, Писмени задаци, задатак 4)



ОП 2012, 1Б – 4

5. Ако су Пера и Жика у истој колони, онда је Пера виши од Жике, јер је Пера највиши у тој колони.

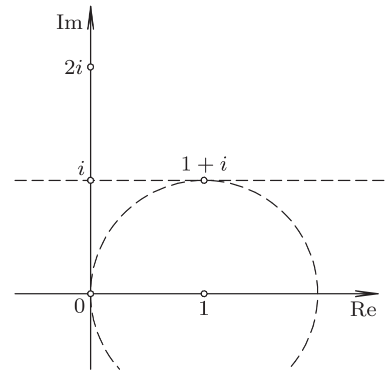
Ако су у истој врсти, онда је Жика нижи од Пере, јер је Жика најнижи у тој врсти.

Ако су Пера и Жика у различитим врстама и колонама, онда постоји трећа особа (назовимо је Лаза), која је у истој колони са Пером и у истој врсти са Жиком. Како је Пера виши од Лазе, јер су у истој колони (а Пера је ту највиши), и како је Лаза виши од Жике, јер су у истој врсти (а Жика је ту најнижи), добијамо да је и у овом случају Пера виши од Жике.

Дакле, можемо тврдити да је Пера виши од Жике.

Други разред, Б категорија

1. Посматрајмо комплексне бројеве у комплексној равни. Тада је $|z|$ растојање броја z од тачке 0, а $|z-2i|$ растојање броја z од тачке $2i$, па једначину $|z| = |z-2i|$ задовољавају комплексни бројеви који се налазе на симетрали дужи са крајевима у тачкама 0 и $2i$ (ово је права која пролази кроз тачку i и паралелна је реалној оси). Једначину $|z-1| = 1$ задовољавају комплексни бројеви који се налазе на кругу полупречника 1 са центром у тачки 1. Како права која представља решење прве једначине и круг који представља решење друге једначине имају тачно једну заједничку тачку $z = 1+i$, она је и једино решење датог система једначина. (Тангента 65, стр. 35, Писмени задаци, задатак 5)



ОП 2012, 2Б – 1

Друго решење. Нека $z = a+bi$, где је $a, b \in \mathbb{R}$, задовољава дати систем једначина. Тада, из прве једначине закључујемо $|a+bi| = |a+(b-2)i|$, односно $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b-2)^2}$, па је после квадрирања $b = 1$. Сада, заменом у другу једначину добијамо $1 = |(a-1)+i|$, односно $1 = \sqrt{(a-1)^2+1}$, тј. $a = 1$. Дакле, једино решење датог система једначина је $z = 1+i$.

2. Нека је x број кенгура који су обојени са две боје, а y број кенгура који су обојени са само једном бојом. Тада је $x+y$ број кенгура који нису обојени са све три боје, па је $x+y = 36-5 = 31$. Такође, уколико посматрамо све кенгуре који су обојени са највише две боје, у њиховом бојењу је, по услову задатка, употребљено $(25-5)+(28-5)+(20-5)$ боја. Овај број је, са друге стране, једнак $2x+y$, па је $2x+y = 58$. Решавањем овог система једначина добијамо да је $x = 27$, а $y = 4$, па су на листу нацртана четири једнобојна кенгура. (Тангента 59, стр. 24, Наградни задаци, задатак М857)

3. Решења квадратне једначине $3x^2+4x+1 = 0$ су $x = -\frac{1}{3}$ и $x = -1$. Зато је $f(x) = 3(x+\frac{1}{3})(x+1)$. Сада је

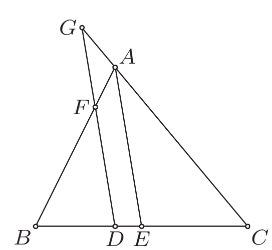
$$f(f(x)) \leqslant 0 \Leftrightarrow\ 3\cdot\left(f(x)+\frac{1}{3}\right)\cdot(f(x)+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow\ -1 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Решења квадратне неједначине $-1 \leqslant f(x)$ су сви реални бројеви (дискриминанта квадратне функције $3x^2+4x+2$ једнака је -8), док је једино решење квадратне неједначине $f(x) \leqslant -\frac{1}{3}$ број $x = -\frac{2}{3}$ (дискриминанта квадратне функције $3x^2+4x+\frac{4}{3}$ једнака је 0). Дакле, једино решење полазне неједначине је $x = -\frac{2}{3}$.

4. Како је $FD \parallel AE$, то је по Талесовој теореми $DF/EA = BD/BE$, а како је $AE \parallel GD$, то је $DG/AE = DC/EC$. Како је $BE = EC$ сабирањем претходне две једнакости добијамо

$$\frac{DF+DG}{AE} = \frac{BD+DC}{BE} = \frac{BC}{BE} = 2,$$

па је $DF+DG$ једнако $2AE$ и самим тим не зависи од положаја праве p.



ОП 2012, 2Б – 4

5. Како је по формули за куб бинома $(1+\sqrt{2})^3 = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$, а по формули за квадрат бинома $(1+\sqrt{3})^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3} > 0$, то је

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}} = 1,$$

чиме је тврђење задатка доказано. (Тангента 61, стр. 32, Писмени задаци, задатак 4)

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је c дужина треће странице основе. Тада је на основу косинусне теореме

$$c^2 = 3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos 120^\circ = 49,$$

па је $c = 7$. Самим тим, бочна страна највеће површине има једну страницу дужине 7, па је $35 = 7 \cdot H$, тј. $H = 5$, где је H висина дате призме. Површина омотача призме једнака је $3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 75$. (Тангента 57, стр. 29, Писмени задаци, задатак 1)

2. Уколико трећу једначину додамо другој, а затим трећу једначину помножену са -3 додамо првој добијамо еквивалентан систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} & & (a-12)y & - & 10z & = & a-10 \\ & & 5y & + & (a+3)z & = & 4 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 3. \end{array}$$

Уколико другу једначину новодобијеног система једначина помножимо са $-\dfrac{a-12}{5}$ и додамо првој, добијамо једначину

$$\frac{-a^2+9a-14}{5} \cdot z = \frac{a-2}{5}. \qquad (\dagger)$$

Како је $-a^2+9a-14 = -(a-2)(a-7)$, размотрићемо следећа три случаја:

Први случај: $a \neq 2$, $a \neq 7$. Тада је из $(\dagger)$ $z = -\dfrac{1}{a-7}$, па је даље $y = \dfrac{a-5}{a-7}$ и $x = \dfrac{-a+2}{a-7}$.

Други случај: $a = 7$. Једначина $(\dagger)$ нема решења, па ни полазни систем нема решења.

Трећи случај: $a = 2$. Тада свако $z = t$ задовољава $(\dagger)$, па је даље $y = \dfrac{4}{5} - t$ и $x = t - \dfrac{1}{5}$. Дакле, у овом случају решења система су $\left(t - \dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5} - t, t\right)$, за све $t \in \mathbb{R}$.

(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци, задатак 4)

3. Услов дефинисаности датог израза је $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$. Нека је $\arcsin 3x = a$, а $\operatorname{arctg} 5x = b$. Како $3x = \pm 1$ нису решења дате једначине, можемо претпоставити да је $\sin a \neq \pm 1$. Даље је $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, па је

$$5x = \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}. \qquad (\dagger)$$

Једно решење једначине $(\dagger)$ је $x = 0$ и ово је решење полазне једначине. Ако је $x \neq 0$, тада из $(\dagger)$ добијамо $\sqrt{1-9x^2} = \pm \dfrac{3}{5}$, па знак мора бити $+$. Квадрирањем и сређивањем, добијамо да су преостала решење једначине $(\dagger)$ $x = \pm \dfrac{4}{15}$. Како за $x = \dfrac{4}{15}$ важи $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а за $x = -\dfrac{4}{15}$ важи $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, то су $x = \pm \dfrac{4}{15}$ решења и полазне једначине.

Сва решења дате једначине су $x = 0$, $x = \dfrac{4}{15}$ и $x = -\dfrac{4}{15}$.

4. Означимо са H и h висине доњег и горњег дела зарубљене купе. Изједначавајући запремине ових делова добијамо $\dfrac{\pi H}{3} \cdot (R^2 + R\rho + \rho^2) = \dfrac{\pi h}{3} \cdot (\rho^2 + \rho r + r^2)$, одакле је

$$\frac{H}{h} = \frac{\rho^2 + \rho r + r^2}{R^2 + R\rho + \rho^2}. \qquad (3)$$

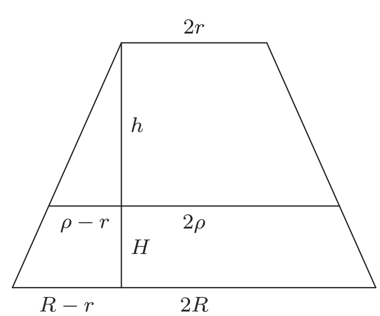
Из Талесове теореме (погледати слику десно – на њој је дат попречни пресек дате зарубљене купе) имамо $\dfrac{h}{H+h} = \dfrac{\rho - r}{R - r}$, односно, након сређивања

$$\frac{H}{h} = \frac{R - \rho}{\rho - r}. \qquad (4)$$

Изједначавањем десних страна (3) и (4) добијамо $R^3 - \rho^3 = \rho^3 - r^3$, па је $2\rho^3 = R^3 + r^3$ и

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

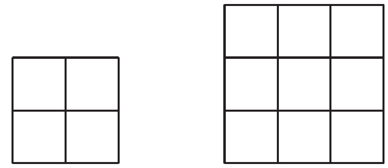
(Тангента 65, Наградни задаци, задатак M972)



ОП 2012, 3Б – 4

5. Докажимо да је одговор у оба дела задатка ДА.

Квадрат се може поделити на 4 и на 9 квадрата као на слици десно.



ОП 2012, 3Б – 5

Поделом произвољног квадрата на неки од претходних начина, број квадрата у подели се повећава или за 3 (првим начином) или за 8 (другим начином).
Како је $2011 = 1 + 3 \cdot 670$, понављањем поделе квадрата првим начином 670 пута добиће се подела у којој учествује 2011 квадрата. Како је $2012 = 1 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 665$, са две поделе другим начином и 665 подела првим начином добиће се подела квадрата на 2012 квадрата.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a = a_1$ почетни члан, а $d = a_2 - a_1$ разлика овог аритметичког низа. Тада је $a_m = a + (m-1)d$, $a_n = a + (n-1)d$, $a_p = a + (p-1)d$, па за $L = a_m(n-p) + a_n(p-m) + a_p(m-n)$ важи

$$\begin{aligned} L &= (a+(m-1)d)\cdot(n-p) + (a+(n-1)d)\cdot(p-m) + (a+(p-1)d)\cdot(m-n) \\ &= a(n-p) + (mn - mp - n + p)\cdot d + a(p-m) + (np - nm - p + m)\cdot d + a(m-n) + (pm - pn - m + n)\cdot d = 0, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 64, стр. 33, Писмени задаци, задатак 1)

2. Како је

$$p(\lambda i) = (\lambda i)^3 + (3-4i)\cdot(\lambda i)^2 - (3+8i)\cdot(\lambda i) - 5 = -3\lambda^2 + 8\lambda - 5 + (-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda)i,$$

то из $p(\lambda i) = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ закључујемо да је $-3\lambda^2 + 8\lambda - 5 = 0$ и $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Решења прве једначине су 1 и $\frac{5}{3}$, а друге 0, 1 и 3, па је $\lambda = 1$, и $z_1 = i$ корен полинома p. Нека су z_2 и z_3 преостала два корена полинома p. Тада је по Виетовим формулама $i + z_2 + z_3 = 4i - 3$ и $iz_2z_3 = 5$, па је $z_2 + z_3 = 3i - 3$ и $z_2z_3 = -5i$. Самим тим, z_2 и z_3 су решења квадратне једначине $x^2 + (3-3i)x - 5i = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине је $D = 2i = (1+i)^2$, па је $z_{2,3} = \dfrac{3i - 3 \pm (1+i)}{2}$.

Корени датог полинома су i, $-1+2i$ и $-2+i$. (Тангента 64, стр. 33, Писмени задаци, задатак 5)

3. Ако је a реалан број за који важи $|a| \leqslant 1$, а $n \geqslant 2$, онда је $|a|^n \leqslant |a|^2$. Одавде, за $n \geqslant 2$, на основу неједнакости троугла (за $a, b \in \mathbb{R}$ важи $|a - b| \leqslant |a| + |b|$), имамо

$$|f_n(x)| = |\sin^n x - \cos^n x| \leqslant |\sin^n x| + |\cos^n x| \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

тј. $-1 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$. Како је $f_n(0) = -1$ и $f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, то је за $n \geqslant 2$ максимум једнак 1, а минимум једнак -1.

За $n = 1$ имамо

$$f_1(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Зато је $-\sqrt{2} \leqslant f_1(x) \leqslant \sqrt{2}$. Уз то је $f_1\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, а $f_1\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, па је за $n = 1$ максимум једнак $\sqrt{2}$, а минимум једнак $-\sqrt{2}$.

4. Једначина симетрале првог квадранта је $y = x$, симетрале другог квадранта је $y = -x$, а тангенте на дату хипеболу у тачки $M(3,2)$ је $3x - 2y = 5$. Темена датог троугла су пресеци ових правих. Пресек прве две праве је тачка $A(0,0)$. Пресек $B(x,y)$ прве и треће праве задовољава $y = x$ и $3x - 2y = 5$, па је $x = y = 5$, односно $B(5,5)$. Пресек $C(x,y)$ друге и треће праве задовољава $y = -x$ и $3x - 2y = 5$, па је $x = 1$ и $y = -1$, односно $C(1,-1)$. Приметимо да је ABC правоугли троугао, јер је $\sphericalangle CAB = 90^\circ$, па је његова површина једнака $\frac{1}{2}\cdot BA \cdot CA = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 5$. (Тангента 63, стр. 33, Писмени задаци, задатак 3)

5. Како је сума свих цифара 45, тј. непарна, то и разлика збира бројева на непарним (број A) и збира бројева на парним местима (број B) мора бити непарна. Како је $A - B$ дељиво са 11, то је $A - B \in \{\pm 11, \pm 33\}$. Међутим, како је $A, B \geqslant 0+1+2+3+4 = 10$ и $A, B \leqslant 5+6+7+8+9 = 35$, то је, према претходном, $A - B \in \{\pm 11\}$. Дакле, имамо $A + B = 45$ и $A - B = 11$, што даје $A = \frac{45+11}{2} = 28$ и $B = \frac{45-11}{2} = 17$, или $A + B = 45$ и $A - B = -11$, што даје $A = 17$ и $B = 28$.

Одредимо највећи број са траженим својством. За њега важи $A = 28$, $B = 17$ и при томе цифре највеће тежине морају бити што је веће могуће. Приметимо да овај број не може почети са 987654, јер је тада $17 = B \geqslant 8 + 6 + 4 = 18$, контрадикција. Уколико дати број почиње са 98765, тада преостале три цифре на парним местима дају збир 3, па како су различите морају бити 2, 1 и 0. Преостале цифре на парним местима су 4 и 3, па је највећи број једнак 9876524130.

Одредимо најмањи број са траженим својством. За њега важи $A = 17$, $B = 28$ и при томе цифре највеће тежине морају бити што је мање могуће. Дакле, он почиње са 102. Следећа цифра је 4, јер је $0 + 3 + 9 + 8 + 7 < B = 28$, па су преостале цифре на парним местима 7, 8 и 9, и самим тим преостале цифре на непарним местима 3, 5 и 6. Коначно, најмањи број са траженим својством је 1024375869.