РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, А категорија

1. Како је T_i тежиште $\triangle A_iB_iC_i$ (за $i \in \{1,2\}$), следи $\overrightarrow{T_iA_i} + \overrightarrow{T_iB_i} + \overrightarrow{T_iC_i} = 0$, па је

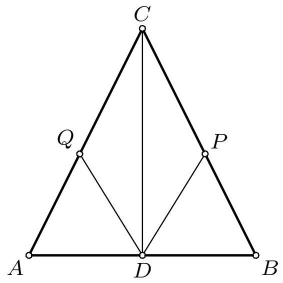
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} &= \left(\overrightarrow{A_1T_1} + \overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_2A_2}\right) + \left(\overrightarrow{B_1T_1} + \overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_2B_2}\right)\\ &+ \left(\overrightarrow{C_1T_1} + \overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_2C_2}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{T_1A_1} + \overrightarrow{T_1B_1} + \overrightarrow{T_1C_1}\right) + 3 \cdot \overrightarrow{T_1T_2} + \left(\overrightarrow{T_2A_2} + \overrightarrow{T_2B_2} + \overrightarrow{T_2C_2}\right)\\ &= 3 \cdot \overrightarrow{T_1T_2},\end{aligned}$$

што је и требало доказати (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5).

2. Из $n \equiv 35 \pmod{2009}$ следи $n = 2009p+35$ за неко $p \in \mathbb{N}_0$, па је $n+7 = 2009p+42 = 7\cdot(287p+6)$, тј. $7 \mid n+7$. Из $n \equiv 35 \pmod{2010}$ следи $n = 2010q+35$ за неко $q \in \mathbb{N}_0$, па је $n+7 = 2010p+42 = 6 \cdot (335p+6)$, тј. $6 \mid n+7$. Како је $(6,7) = 1$, следи $42 \mid n+7$, па n при дељењу са 42 даје остатак 35.

3. Како је $\sphericalangle CDB$ спољни у $\triangle ADC$, следи $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DCA > \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$, па је $BC > DB$. Аналогно је $CA > AD$, па постоје тачке P и Q на дужима BC и AC, редом, тако да је $AD = AQ$ и $BD = BP$. Како је $CQ = AC - AQ = AC - AD = BC - BD = BC - BP = CP$, $\sphericalangle DCQ = \sphericalangle PCD$ и $CD = CD$, следи $\triangle DPC \cong \triangle DCQ$, па је $DQ = DP$ и $\sphericalangle CQD = \sphericalangle DPC$.

Следи $\triangle ADQ \cong \triangle DBP$ ($\sphericalangle ADQ = \sphericalangle DQA = 180^\circ - \sphericalangle CQD = 180^\circ - \sphericalangle DPC = \sphericalangle BPD = \sphericalangle DBP$ и $DQ = DP$), па је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, је $\triangle ABC$ је једнакокрак (Тангента 56, стр. 9, Наградни задаци, M801).



ОП 10 1A 3

4. Нека је $x = 2010^{2010}+10^{2011}$ и $y = 2010^{2010}$. Како је $x = 10^{2010}\cdot\left(201^{2010}+10\right)$ и $y = 10^{2010}\cdot 201^{2010}$, то број x има већи број цифара од броја y ако и само ако број $a = 201^{2010}+10$ има већи број цифара од броја $b = 201^{2010}$. Пошто је $a - b = 10$, ако a има већи број цифара од b, остатак b при дељењу са 100 је не мањи од 90. Међутим, важи $b \equiv 201^{2010} \equiv 1^{2010} \equiv 1 \pmod{100}$, па a нема већи број цифара од b, тј. ни x нема већи број цифара од y (како је $x > y$, ово значи да они имају једнак број цифара).

5. Нека су боје означене са a, b и c. Ако је централно поље обојено бојом a, могући су следећи случајеви:

1° Сва четири поља суседна централном су обојена истом бојом. Та боја се може изабрати на 2 начина и тада за свако угаоно поље постоји 2 могућности за избор боје (ако је, на пример, боја поља суседних централном b, угаона могу бити боје a или c), па је у овом случају број могућих бојења $2 \cdot 2^4 = 32$.

2° Три поља суседна централном су исте, а четврто је различите боје. Таквих бојења има $\binom{4}{1} = 4$ и за свако такво бојење преостала (угаона) поља се могу обојити на 2^2 начина (2 угаона поља имају суседна поља различите боје, па је њихова боја једнозначно одређена; преостала 2 имају суседна исте боје, па за њихово бојење постоје 2 могућности), па је број бојења у овом случају $2 \cdot 4 \cdot 2^2 = 32$.

3° По два суседна поља су обојена истом бојом. У овој ситуацији постоји два случаја:

(а) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су различите боје (оваквих бојења има 4). Тада 2 угаона поља имају суседна поља различите боје (па је њихова боја јединствено одређена), а 2 угаона поља имају суседна поља исте боје (па се њихова боја може изабрати на 2 начина). Следи да је број бојења у овој ситуацији $4 \cdot 2^2 = 16$.

(б) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су исте боје (оваквих бојења има 2). Тада свако угаоно поље има суседна поља различите боје, па је њихова боја јединствено одређена, тј. број бојења у овој ситуацији је 2.

Дакле, ако је централно поље обојено бојом a, тражених бојења има $32 + 32 + 16 + 2 = 82$, па је укупан број тражених бојења $3 \cdot 82 = 246$.

Први разред, Б категорија

1. Из 1° следи да се елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ налазе у макар једном од A и B. Из 2° следи $2 \in A$, из 3° следи $3 \notin A$, из 4° следи $4, 5, 6 \notin A$, а из 5° следи $1 \notin B$, па како је $1 \in A \cup B$, следи $1 \in A$. Дакле $A = \{1, 2\}$. Из 2° следи $2 \notin B$, из 3° следи $3 \in B$, из 4° следи $4, 5, 6 \notin A$, па како је $4, 5, 6 \in A \cup B$, следи $4, 5, 6 \in B$, а из 5° следи $1 \notin B$. Дакле $A = \{3, 4, 5, 6\}$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 2).

2. **(а)** Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Следи да је $x \to 5 - 2x$ бијекција. Ако је $t = 5 - 2x$, следи $x = \dfrac{5-t}{2}$, па је $g(t) = 4 \cdot \dfrac{5-t}{2} - 7 = 3 - 2t$ (за свако $t \in \mathbb{R}$).

(б) За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = g\left(g(x)\right) = 3 - 2(3 - 2x) = 4x - 3$.

(в) Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Дакле, f је бијекција и важи $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$ (Тангента 57, стр. 28, Писмени задаци, задатак 4).

3. Бројеви n и $n-3$ су различите парности, па је број $n(n-3)$ паран. Како је $14 \equiv 2 \pmod 4$, ако $2 \mid m$, следи да су бројеви m и $m+2$ парни бројеви који дају различите остатке при дељењу са 4, тј. 0 и 2, па $8 \mid m(m+14)$. Специјално, ово је тачно за $m = n(n-3)$, што је тврђење задатка (Тангента 57, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5).

4. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

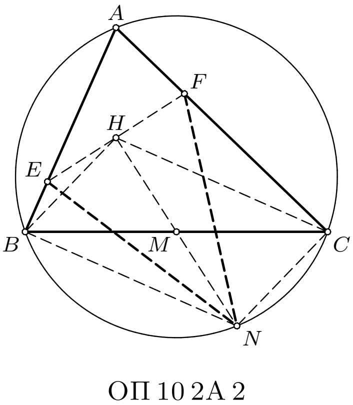
5. Видети решење петог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Једначина из текста задатка је квадратна и има реална и различита решења ако и само ако је њена дискриминанта строго већа од 0, тј. ако и само ако је $0 < \left(2(m-1)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+5) = 4 \cdot (m^2 - 3m - 4) = 4(m+1)(m-4)$, тј. $m \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

Како је $f(-2) = 4 - 2(m-1)(-2) + m + 5 = 5(m+1)$, $f(3) = 9 - 2(m-1) \cdot 3 + m + 5 = -5(m-4)$, $f(-2) \cdot f(3) = -20 \cdot (m+1)(m-4) < 0$ за горе наведене вредности m, што (будући да је у питању квадратна једначина) управо значи да она има тачно један корен у $(-2, 3)$.

2. Нека је N тачка симетрична са H у односу на M. На основу великог задатка следи да N припада описаној кружници $\triangle ABC$ и да је $\sphericalangle ABN = \sphericalangle NCA = 90^\circ$, па следи да су четвороуглови $BNHE$ и $CFHN$ тетивни и над пречницима EN и FN, редом. Како је $\sphericalangle NBH = 90^\circ - \sphericalangle HBE = 90^\circ - (90^\circ - \sphericalangle CAB) = \sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle NCH = 90^\circ - \sphericalangle HCF = 90^\circ - (90^\circ - \sphericalangle CAB) = \sphericalangle CAB$, следи да над (заједничком) тетивом NH кружница описаних око ових четвороуглова леже једнаки углови, па је $EN = FN$, одакле следи и $HE = HF$ (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, М799).



ОП 10 2А 2

3. Нека је $m = \sqrt[3]{n} \in \mathbb{Z}$. По условима задатка је $m = \sqrt[3]{n} = \left[\dfrac{n}{1000}\right]$. Како је $x - 1 < [x] \leqslant x$, следи $m \leqslant \dfrac{m^3}{1000} \Leftrightarrow m^2 \geqslant 1000$, одакле је $m \geqslant 32$ и $m > \dfrac{m^3}{1000} - 1$, одакле је $m^2 < 1000 + \dfrac{1000}{m} < 1000 + \dfrac{1000}{32} < 1032 < 1089 = 33^2$, па је $m < 33$.

Дакле, једино могуће решење је $m = 32$, тј. $n = 32^3 = 32768$; како је $\left[\dfrac{32768}{1000}\right] = 32$, следи да ово и јесте решење (Тангента 54, стр. 19, Наградни задаци, М748).

4. Нека је $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = x + \frac{\pi}{2}$ (тада и $y \in (0, \pi)$). Тада је $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin^2(x+y) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 2x \neq 1$, па је $\left|\left\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\right\}\right| = 2$.

Ако је $m \in \mathbb{N}$ и $x = \dfrac{\pi}{m} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тада је $\sin(n+4m)x + \sin\left[(n+4m)\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \sin(nx + 2\pi) + \sin\left[n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\pi + 2m\pi\right] = \sin nx + \sin n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, тј. низ $\left(\sin nx + \sin n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ је $4m$-периодичан, па је $|\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}| < \infty$.

5. У „стандардном” бојењу шаховске табле, оба избачена поља су црне боје, па разлика броја белих и црних поља даје остатак 2 при дељењу са 3. Са друге стране, и домина 2×1 и домина 1×2 покрива једно црно и једно бело поље, док „крстић” покрива 4 поља једне и једно поље друге боје, тј. за сваку од фигура које се користе у поплочавању је разлика броја белих и броја црних поља дељива са 3. Дакле, не постоји поплочавање тражено у задатку.

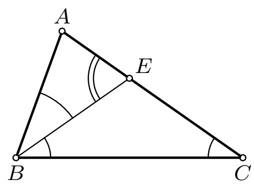
Други разред, Б категорија

1. Нека је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Једначина из задатка је еквивалентна са $2(y+1)i = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Пошто је лева страна последње једначине чисто имагинарна, а десна реална, последња једначина је еквивалентна са $2(y+1)i = 0 = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, тј. са $y = -1$ и $x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.

Дакле, решење задатка је $z \in \{-2\sqrt{3} - i, 2\sqrt{3} - i\}$ (Тангента 57, стр. 29, Писмени задаци, задатак 5).

2. Ако је $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, следи да је једначина коректно дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$ и постаје $t + \dfrac{3}{t} \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)(t-3)}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow t \in [1, 3]$, тј. $0 \leqslant x^2 + x \leqslant 2$. Како је $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ решење неједначине $0 \leqslant x^2 + x$, а $x \in [-2, 1]$ неједначине $x^2 + x \leqslant 2$, следи да је решење неједначине из задатка $x \in [-2, -1] \cup [0, 1]$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 5).

3. Како је $\sphericalangle BEA$ спољашњи у $\triangle BCE$, следи $\sphericalangle BEA = \sphericalangle EBC + \sphericalangle BCE = \sphericalangle ABC$, па је $\triangle ABC \sim \triangle ABE$ ($\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCA$), па је $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$, тј. $AB^2 = AC \cdot AE$ (Тангента 56, стр. 33, Писмени задаци, задатак 1).



ОП 10 2Б 3

4. Ако је $n = 3$, тада је $n^2 + 9n - 22 = 14 = 2 \cdot 7$, тј. овај број је сложен. Ако је $n > 3$, тада је $n^2 + 9n - 22 = (n-2)(n+11)$ и важи $n - 2, n + 11 > 1$, па је и у овом случају број $n^2 + 9n - 22$ сложен, тј. ни за једно $n \geqslant 3$ број из услова задатка није прост.

5. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Неједначина има смисла за $4^x - 12 > 0$, $\log_2(4^x - 12) > 0$, $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} > 0$ и $\sqrt{x} \neq 1$, тј. за

$x > \log_4 13$. За такво x је $\sqrt{x} > 1$ (обе логаритамске функције које се јављају у неједначини су растуће), па је

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leqslant 2 \Leftrightarrow \log_2 (4^x - 12) \leqslant \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \\ \Leftrightarrow \quad & 4^x - 12 \leqslant 2^x \Leftrightarrow (2^x - 4)(2^x + 3) \leqslant 0, \end{aligned}$$

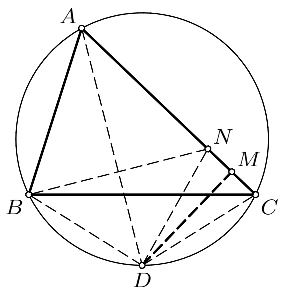
па мора бити $2^x \in (0, 4]$, одакле је $x \in (-\infty, 2]$, што, уз услов дефинисаности неједначине, даје решење $x \in (\log_4 13, 2]$ (Тангента 56, стр. 7, Наградни задаци, M788).

2. Нека је $x = 1 + 2010!$ и $y = 1 + (2010!)!$. Како је 2011 прост, на основу Вилсонове теореме $2011 \mid x$, па како је $x > 2011$, x је сложен. Пошто је и $x > 4$, следи $x \mid (x-1)!$, па је $y = (x-1)! + 1 = q \cdot x + 1$ за неко $q \in \mathbb{N}$. Следи $(x, y) = 1$.

3. Нека су α, β, γ углови који одговарају теменима A, B, C, редом, троугла ABC, а R полупречник описане кружнице овог троугла. Како је D средиште $\widehat{BC}$, следи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD = \dfrac{\alpha}{2}$, па је $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCB = \gamma + \sphericalangle DAB = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$, па из правоуглог $\triangle CDM$ (угао над тетивом CD описане кружнице $\triangle ABC$ је $\dfrac{\alpha}{2}$) следи $CM = CD \cdot \cos \sphericalangle DCM = CD \cdot \cos \sphericalangle DCA =$

$$\begin{aligned} &= 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= R \cdot (\sin(\alpha + \gamma) - \sin\gamma) \\ &= \frac{2R\sin\beta - 2R\sin\gamma}{2} = \frac{AC - AB}{2}. \end{aligned}$$

Друго решење. Нека је N тачка на AC таква да је $AB = AN$. Тада је AD симетрала дужи BN па је $DN = BD = DC$ и троугао NDC је једнакокрак, па је M средиште CN, одакле је $CM = \dfrac{AC - AB}{2}$.



ОП 10 3А 3

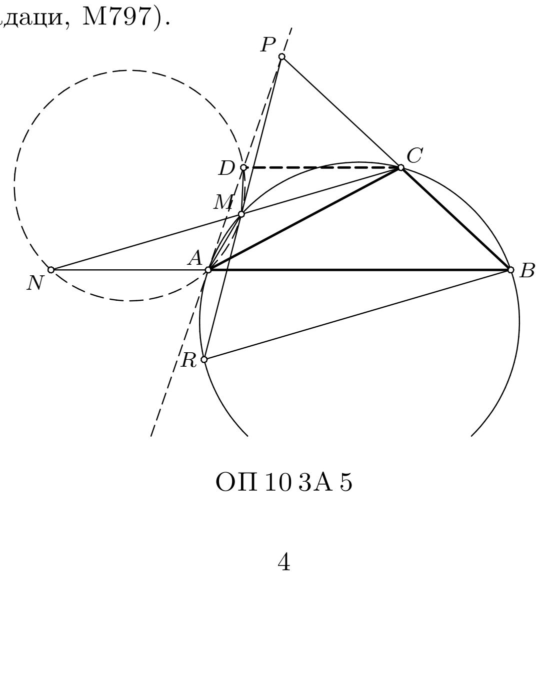
4. Нека је a_k (за $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$) број одабраних тачака са праве $x = k$ (k-та колона); по услову задатка је $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 21$. Избор пара тачака у некој колони се може поистоветити за избором пара одговарајућих врста, тј. ако не постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама, тада је

$$\binom{5}{2} \geqslant \sum_{k=1}^{10} \binom{a_k}{2}$$

(врста укупно има 5, па парова врста има $\binom{5}{2}$). Како је функција $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ конвексна, из Јенсенове неједнакости следи

$$10 \geqslant 10 \cdot f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{10}\right) = 10 \cdot f\left(\frac{21}{10}\right),$$

тј. $200 > 231$, што је контрадикција, па следи да постоји тражени правоугаоник (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, M797).



ОП 10 3А 5

5. Нека је R пресек k са правом PM. Како је $\sphericalangle PMC = \sphericalangle PCM$ (јер је $PM = PC$), следи да је $RBCM$ једнакокраки трапез и $CM \parallel RB$. Следи $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MNA = \sphericalangle RBA = \sphericalangle AMR$ (углови над истом тетивом и углови са паралелним крацима), па је $\triangle DPM \sim \triangle MPA$ и $PA \cdot PD = PM^2 = PC^2$,одакле је $\triangle PDC \sim \triangle PCA$, па је $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle PBA$ ($\sphericalangle PAC = \sphericalangle ABC$ следи из једнакости тангентног и тетивног угла), одакле следи $CD \parallel AB$.

Трећи разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a + 2 = -(a+1)^2(a-2), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1-a & a \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -a & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - 2a = a(a+1)(a-2),
\end{aligned}$$

за $a \notin \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве a систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(0, \frac{1}{a+1}, -\frac{a}{a+1} \right).$$

Ако је $a = -1$, тада је -1 једнострука нула у Δ_y, а двострука у Δ, па у овом случају систем нема решења.

Ако је $a = 2$ систем постаје

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1, \\
2x - y + z &= -1, \\
x - 2y - z &= 0.
\end{aligned}$$

Одузимањем двоструке прве једначине од друге, односно одузимањем прве од треће, добија се еквивалентан систем

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1, \\
- 3y - 3z &= 1, \\
- 3y - 3z &= 1,
\end{aligned}$$

односно (како су друга и трећа једначина еквивалентне)

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1, \\
- 3y - 3z &= 1,
\end{aligned}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = -z - \frac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 - \left(-z - \frac{1}{3}\right) - 2z = -z - \frac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

(Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 4).

2. Нека је A врх, а B, C, A_1 темена основе пирамиде из задатка. Како је она правилна са правим ивичним угловима при врху A, постоје тачке D, B_1, C_1, D_1, тако да је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка. Описана сфера те коцке се поклапа да описаном сфером пирамиде $ABCA_1$ (четири некомпланарне тачке једнозначно одређују сферу). Нека је R полупречник те сфере, a страница коцке (она је једнака бочној ивици пирамиде), а H висина пирамиде из темена A. Основне ивице пирамиде су $a\sqrt{2}$ (дијагонала квадрата), а како је дијагонала коцке пречник сфере, следи $2R = a\sqrt{3}$, тј. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Запремина пирамиде $ABCA_1$ једнака је $V(ABCA_1) = \dfrac{P(\triangle BCA_1)\cdot H}{3} = \dfrac{\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot H}{3} = \dfrac{a^2H\sqrt{3}}{6}$ (где $P(\triangle XYZ)$ означава површину $\triangle XYZ$; $\triangle BCA_1$ је једнакостраничан, странице $a\sqrt{2}$). Међутим, како је AA_1 висина пирамиде која одговара страни ABC, следи и $V(ABCA_1) = \dfrac{P(\triangle ABC)\cdot AA_1}{3} = \dfrac{\frac{a\cdot a}{2}\cdot a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$, па је $\dfrac{a^2H\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{6}$, одакле је $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Следи $\dfrac{H}{R} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{3}$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 1).

3. По услову задатка је $a, b, c, d \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, па следи и $\cos(x+\varphi), \cos(x+2\varphi), \cos(x+3\varphi) \neq 0$. Из услова задатка је $b = a\cdot\dfrac{\cos(x+\varphi)}{\cos x}$, $c = a\cdot\dfrac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}$, $d = a\cdot\dfrac{\cos(x+3\varphi)}{\cos x}$, па је

$$\begin{aligned}
\frac{a+c}{b} &= \frac{a + a\cdot\frac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}}{a\cdot\frac{\cos(x+\varphi)}{\cos x}} = \frac{\cos x + \cos(x+2\varphi)}{\cos(x+\varphi)} = \frac{2\cos(x+\varphi)\cos\varphi}{\cos(x+\varphi)} = 2\cos\varphi \quad \text{и}\\
\frac{b+d}{c} &= \frac{a\cdot\frac{\cos(x+\varphi)}{\cos x} + a\cdot\frac{\cos(x+3\varphi)}{\cos x}}{a\cdot\frac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}} = \frac{\cos(x+\varphi)+\cos(x+3\varphi)}{\cos(x+2\varphi)}\\
&= \frac{2\cos(x+2\varphi)\cos\varphi}{\cos(x+\varphi)} = 2\cos\varphi,
\end{aligned}$$

одакле следи тврђење задатка (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2).

4. Свако $k \in \{1, 2\ldots, n\}$, по условима задатка, припада једном (и тачно једном, јер су дисјунктни) од скупова $X\setminus Y$, $X\cap Y$, $Y\setminus X$ и тај избор је независан за различите елементе скупа $\{1, 2\ldots, n\}$, па решења скуповне једначине из задатка има 3^n.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

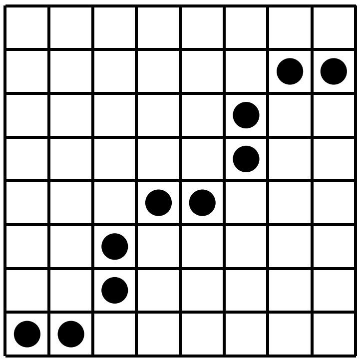
1. Нека је $g(x) = 1 + \frac{3}{2}\cdot x + \frac{3}{8}\cdot x^2 - (1+x)^{\frac{3}{2}}$ и $h(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{3}{2}\cdot x - \frac{3}{8}\cdot x^2 + \frac{x^3}{16}$ (за $x \geqslant 0$; g и h су бесконачно диференцијабилне на $[0,\infty)$). Тада је $g'(x) = \frac{3}{2}\cdot\left(1 + \frac{x}{2} - (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)$, $g''(x) = \frac{3}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$; следи $g''(x) > 0$ за $x > 0$, па g' расте, а како је $g'(0) = 0$, следи $g'(x) > 0$ за $x > 0$; даље, g расте, $g(0) = 0$, па је и $g(x) > 0$ за $x > 0$. Овим је доказана „десна" од две неједнакости из задатка.

Слично, $h'(x) = \frac{3}{2}\cdot\left((1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)$, $h''(x) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2}\right)$, $h'''(x) = \frac{3}{8}\cdot\left(1 - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right)$; следи $h'''(x) > 0$ за $x > 0$, па h'' расте, а како је $h''(0) = 0$, следи $h''(x) > 0$ за $x > 0$; следи да h' расте, а како је $h'(0) = 0$, следи $h'(x) > 0$ за $x > 0$; коначно, h расте, а како је $h(0) = 0$, следи $h(x) > 0$ за $x > 0$, тј. друга тражена неједнакост (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 3).

2. Како неки топ туче другог ако и само ако други туче првог, следи да се топови распоређени на тражени начин могу поделити у парове. Сваки од тих парова се налази у некој врсти или некој колони. Нека се v парова налази у врстама, а k у колонама.

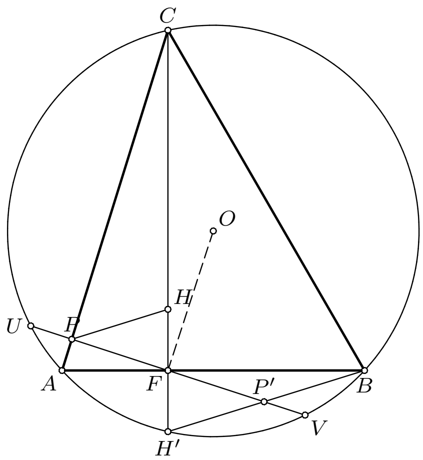
Пар који се налази у колони „заузима” две врсте, тј. у врстама у којима се налазе ови топови не сме бити више топова. Како је врста укупно 8, следи $v+2k \leqslant 8$. Аналогно је $2v+k \leqslant 8$, па следи $3(v+k) \leqslant 16 \Leftrightarrow v+k \leqslant \frac{16}{3}$, тј. $v+k \leqslant 5$. Следи да се, при условима задатка, на таблу може поставити не више од 10 топова.

Са друге стране, 10 топова се може поставити на таблу, тако да су испуњени услови задатка, на пример, као на слици ОП 10 4А 2.

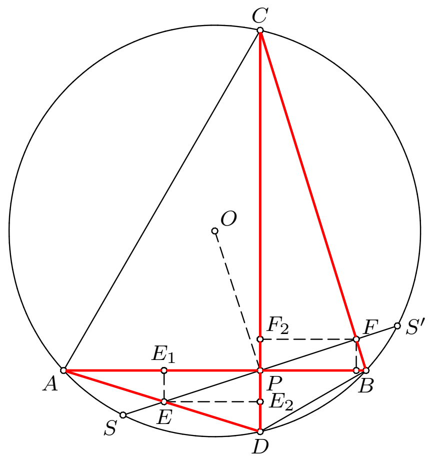


ОП 10 4А 2

3. Нека је H' тачка симетрична са H у односу на AB (H' припада описаној кружници $\triangle ABC$). Нека права FP описану кружницу $\triangle ABC$ у U и V, а праву $H'B$ у P'. Пошто је $OF \perp UV$, F је средиште дужи UV, па је, по леми о лептиру, F средиште дужи PP'. Следи $\triangle H'FP' \cong \triangle FHP$ ($HF = H'F$, $\sphericalangle H'FP' = \sphericalangle PFH$, $PF = P'F$), одакле је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FH'P' = \sphericalangle CH'B = \sphericalangle CAB$ (Тангента 57, стр. 15, Наградни задаци, M820).



ОП 10 4А 3-1



ОП 10 4А 3-2

Лема. *(„лема о лептиру”) Кроз средиште P тетиве SS' кружнице конструисане су тетиве AB и CD, тако да су тачке A и C са исте стране праве SS'. Нека AD и BC секу SS' у E и F, редом. Тада је $EP = PF$.*

Доказ. Нека су E_1 и E_2 подножја нормала из E на AB и CD, редом. Нека су F_1 и F_2 подножја нормала из F на AB и CD, редом. Како је $\triangle EPE_1 \sim \triangle FPF_1$ и $\triangle EPE_2 \sim \triangle FPF_2$ следи $\frac{EP}{PF} = \frac{EE_1}{FF_1}$ и $\frac{EP}{PF} = \frac{EE_2}{FF_2}$. Како је $\triangle AEE_1 \sim \triangle CFF_2$ ($\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$) и $\triangle DEE_2 \sim \triangle BFF_1$ ($\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$) следи $\frac{AE}{CF} = \frac{EE_1}{FF_2}$ и $\frac{DE}{BF} = \frac{EE_2}{FF_1}$.

Како је $SP = SP'$, користећи потенцију тачака E и F, следи $\left(\frac{EP}{PF}\right)^2 = \frac{EE_1}{FF_1} \cdot \frac{EE_2}{FF_2} = \frac{EE_1}{FF_2} \cdot \frac{EE_2}{FF_1} = \frac{AE \cdot DE}{BF \cdot CF} = \frac{SE \cdot ES'}{SF \cdot FS'} = \frac{SP^2 - EP^2}{SP^2 - FP^2}$, одакле је $EP = PF$.

4. Нека је p решење задатка. Тада је $2010^{p^{2010}}+1\equiv 0 \pmod p$ и (на основу мале Фермаове теореме, тј. $a^p\equiv a \pmod p$)

$$2010^{p^{2010}}+1\equiv \left(2010^{p^{2009}}\right)^p+1\equiv 2010^{p^{2009}}+1\equiv\ldots\equiv 2010^{p^1}+1\equiv 2010+1\equiv 2011 \pmod p,$$

па је $0\equiv 2011 \pmod p$, тј. $p\mid 2011$. Како је 2011 прост, $p=2011$ је једино p које може бити решење задатка.

Нека је $s=2011^{2010}$. Из биномне формуле следи

$$2010^s+1=(2011-1)^s+1=1+\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}2011^i\cdot(-1)^{s-i}=\sum_{i=1}^{s}\binom{s}{i}2011^i\cdot(-1)^{s-i}. \qquad (*)$$

За $i\geqslant 2010$ важи $2011^{2010}\mid 2011^i$, па $s\mid\binom{s}{i}\cdot 2011^i\cdot(-1)^{s-i}$. За $1\leqslant i<2010$ важи $(i!,2011)=1$. Како је бројилац разломка $\displaystyle\binom{s}{i}=\frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-i+1)}{i!}$ дељив са 2011^{2010} (пошто је $s=2011^{2010}$), следи да (за $1\leqslant i<2010$) важи $s\mid\displaystyle\binom{s}{i}$, па и $s\mid\displaystyle\binom{s}{i}\cdot 2011^i\cdot(-1)^{s-i}$. Следи да су сви сабирци у $(*)$ дељиви са s, тј. $p=2011$ је решење задатка.

Дакле, једино решење задатка је $p=2011$.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & m\\ 1 & m & 3\end{vmatrix} = -m^2-m+6=-(m+3)(m-2),\\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & m\\ 2 & m & 3\end{vmatrix} = -m^2-m+6=-(m+3)(m-2),\\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & m\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -m+2=-(m-2),\\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & m & 2\end{vmatrix} = -m+2=-(m-2),
\end{aligned}$$

за $m\notin\{-3,2\}$ важи $\Delta\neq 0$, па за овакве m (и само такве) систем има јединствено решење

$$(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)=\left(1,\frac{1}{m+3},\frac{1}{m+3}\right)$$

(Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како су $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+2\cdot\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{a}-3\cdot\overrightarrow{b}$ колинеарни, са њима су колинеарни и $\frac{1}{5}\cdot\left(3\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{d}\right)=\overrightarrow{a}$ и $\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}\right)=\overrightarrow{b}$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 3).

3. Видети решење другог задатка за трећи разред Б категорије.

4. Неједначина је дефинисана за $x\geqslant 0$. Нека је $x=y^4$, $y\geqslant 0$. Неједначина постаје $8\cdot 3^{y^2+y}+3^{2y+2}\geqslant 3^{2y^2}\Leftrightarrow 8+9\cdot 3^{y-y^2}\geqslant 3^{y^2-y}$. Ако је $z=3^{y^2-y}>0$, неједначина постаје $8+\dfrac{9}{z}\geqslant z\Leftrightarrow\dfrac{(z+1)(z-9)}{z}\leqslant 0$, одакле је $z\in(0,9]$, тј. $3^{y^2-y}\leqslant 3^2$, одакле је $y\in[0,2]$ и, коначно, $x\in[0,16]$.

5. За $x\in\mathbb{R}$ посматрани низ је аритметички ако и само ако постоји $d\in\mathbb{R}$, тако да је

$$d=\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cdot\sin x\cdot\cos 2nx \quad\text{за свако}\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (**)$$

1° Ако је $\sin x = 0$, из $(**)$ следи $d = 0$, тј. овакви бројеви су решења. То су бројеви облика $x = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$ и, у интервалу $\left[2009^2\pi, 2010^2\pi\right]$ их има $2010^2 - 2009^2 + 1 = 2010 + 2009 + 1 = 4020$.

2° Ако је $\sin x \neq 0$, Из $(**)$ следи да је низ $(\cos 2nx)_{n\in\mathbb{N}}$ константан. Специјално, важи $\cos 2x = \cos 4x = 2 \cdot \cos^2 2x - 1$, одакле је $\cos 2x \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(а) Ако је $\cos 2x = 1$, следи $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = 0$, тј. $\sin = 0$, што је немогуће (у овом случају је $\sin x \neq 0$).

(б) Ако је $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, следи $\cos 6x = \cos 2x \cdot \left(4\cos^2 2x - 3\right) = 1$, па низ $(\cos 2nx)_{n\in\mathbb{N}}$ није константан.

Следи да у случају 2° нема решења задатка.

Дакле, тражених x има 4020.

У прилогу дописа шаљемо Вам задатке и решења задатака Општинског такмичења ученика средњих школа, које треба да се одржи 23.01.2010.

Председник Друштва
математичара Србије

Бранко Поповић

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)

Задаци за Окружно такмичење ученика средњих школа, 20.02.2010. Отворити комисијски пред почетак такмичења (задаци на мађарском)