РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

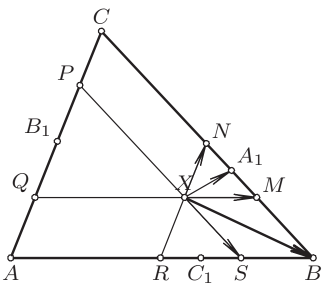
Први разред, А категорија

1. Како је A_1 средиште дужи MN, следи да је $\overrightarrow{XA_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN}\right)$.

Аналогно је $\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ}\right)$ и $\overrightarrow{XC_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XR} + \overrightarrow{XS}\right)$.

Четвороугао $XSBM$ је паралелограм (XB је његова дијагонала), па је $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XS}$. Аналогно, $XNCP$ и $XQAR$ су паралелограми, па је $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}$ и $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{XR}$.

Из претходног и $3\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$ (јер је T тежиште $\triangle ABC$) следи



ОП 09 1А 1

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XR} + \overrightarrow{XS}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{XM}\right) + \left(\overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}\right) + \left(\overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{XR}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XA}\right) = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{XT},
\end{aligned}
$$

што је и требало доказати (Тангента 53, стр. 41, Писмени задаци, задатак 5).

2. **(а)** Како је заступљен представник сваке земље, следи да или једна земља има 3 представника (остале три по 1) или две земље имају 2 представника (остале две по 1).

1° Ако једна земља има 3 представника, њен избор се може извршити на $\binom{4}{3}$ начина, њена 3 представника на $\binom{4}{3}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може извршити на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1}^3 = 1\,024$ избора.

2° Ако две земље имају 2 представника, њихов избор се може извршити на $\binom{4}{2}$ начина, за сваку од њих 2 представника на $\binom{4}{2}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може извршити на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{4}{1}^2 = 3\,456$ избора.

Дакле, одговор на питање дела (а) је $1\,024 + 3\,456 = 4\,480$ избора.

(б) Како свака од земаља има највише 2 представника, следи да бар три земље морају имати представнике, тј. или три земље имају по 2 представника или (ако свака земља има представника) две земље имају 2, а две једног представника.

1° Ако три земље имају по 2 представника, њихов избор се може извршити на $\binom{4}{3}$ начина, а по 2 представника у свакој од њих на $\binom{4}{2}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}^3 = 864$ избора.

2° Ако две земље имају 2 представника (а две једног), број избора је исти као у другом делу дела (а), тј. у овом случају има 3 456 избора.

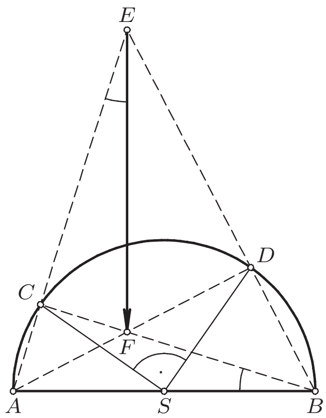
Дакле, одговор на питање дела (б) је $864 + 3\,456 = 4\,320$ избора.

3. Ако $11 \nmid n^2 + 3n + 5$, како је $121 = 11 \cdot 11$, следи и да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$. Ако $11 \mid n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$, следи да $11 \mid (n+7)(n-4)$. Како је 11 прост број, следи да је бар један од бројева $n+7$ и $n-4$ дељив са 11. Међутим, како је њихова разлика 11, тада је дељив и други, па $121 \mid (n+7)(n-4)$, одакле $121 \nmid (n+7)(n-4) + 33 = n^2 + 3n + 5$.

4. Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Притом је $f\left(f(x)\right) - f(x) = a(ax+b) + b - (ax+b) = \left(a^2 - a\right)x + ab$. Ако је за неку овакву функцију $f\left(f(x)\right) - f(x) = 56x + 2\,008$, следи $a^2 - a = 56$ и $ab = 2\,008$. Једно од решења овог система је $a = 8 \neq 0$ и $b = 251$, тј. функција $f(x) = 56x + 251$ је бијекција која задовољава наведени услов.

5. Како је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$ (углови над пречником), тачка F је ортоцентар $\triangle ABE$, па је $EF \perp AB$. Такође је и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle ABC$ (углови са нормалним крацима). Троугао AFC је правоугли ($\sphericalangle FCA = 90°$) и важи $\sphericalangle FAC = \sphericalangle DAC = \dfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle DSC = 45°$ (периферни и централни угао над тетивом DC), па је он и једнакокрак, тј. важи $AC = CF$.

Следи да је $\triangle ABC \cong FEC$ ($AC = CF$ и једнакост углова), тј. $\left|\overrightarrow{EF}\right| = AB$, одакле следи тврђење задатка (Тангента 52, стр. 23, Наградни задаци, М722).



ОП 09 1А 5

Први разред, Б категорија

1. Како је $\dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2}$, да би тражени број био цео, то мора бити и $\dfrac{3}{n+2}$. Како је $n \in \mathbb{N}$, следи $n + 2 \geqslant 3$, а како је једини целобројни делилац броја 3 који је не мањи од 3 једнак 3, следи $n+2 = 3$, тј. $n = 1$. Ако је $n = 1$, вредност траженог израза је $\dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = 1$, тј. природан број, па је једино решење задатка $n = 1$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 5).

2. **(а)** За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = g\left(g(x)\right) - g(x) = 3(3x+1) + 1 - (3x+1) = 6x + 3$.

(б) Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Дакле, f је бијекција и важи $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{6}$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 4).

3. Израз $p \Rightarrow q$ (импликација) је нетачан ако и само ако је p тачно и q нетачно. Следи:

(а) $A \cup B = B$ је еквивалентно са $A \subseteq B$, па ако је и $A \cap B = \emptyset$, следи да мора бити $A = \emptyset$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је или $A = \emptyset$ или $A \cap B \neq \emptyset$;

(б) $A \cap \emptyset = \emptyset$ је увек тачно, па да би била тачна импликација, мора бити $A = \emptyset$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је $A = \emptyset$;

(в) израз $p \Leftrightarrow q$ (еквиваленција) је тачан ако и само ако је или и p тачно и q тачно или и p нетачно и q нетачно; $A \cap B = B$ је еквивалентно са $B \subseteq A$, а то је еквивалентно са $A \subseteq B$ ако и само ако је $A = B$; дакле, ова еквиваленција је тачна ако и само ако је или $A = B$ или ако су A и B неупоредиви (тј. не важи ни $A \subseteq B$ ни $B \subseteq A$);

(г) ако је $A \subseteq B$, тада је $A \setminus B = \emptyset$ (за све A, B), па је ово тврђење увек тачно;

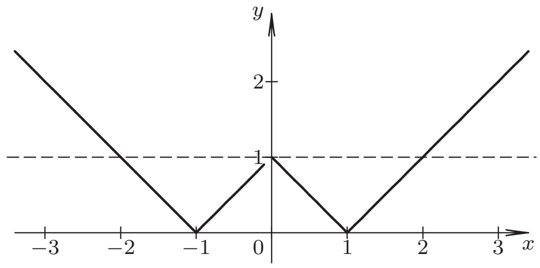
(д) ако је $A \cup B = A$, тада је $B \subseteq A$; ако је, уз то, тачна и ова импликација, следи да је и $A \subseteq B$, па мора бити $A = B$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је или $A \cup B \neq A$ или $A = B$.

(Тангента 48, стр. 34, Писмени задаци, задатак 7, измењен).

4. Нека је $f(x) = \big||x|-1\big|$. Како је $|x|-1 = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x<0 \\ x-1, & \text{за } x \geqslant 0 \end{cases}$, следи да је

$$\big||x|-1\big| = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x<-1 \\ x+1, & \text{за } -1 \leqslant x < 0 \\ -x+1, & \text{за } 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & \text{за } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Права паралелна x-оси може сећи овај график у највише четири тачаке, што се догађа за $0 < a < 1$ (Тангента 48, стр. 35, Писмени задаци, задатак 13).



ОП 09 1Б 4

5. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Заменом $x = 0$ се добија $0 \leqslant b^2 = \cos(b^2) - 1 \leqslant 0$, па следи $b = 0$.

Нека је $b = 0$. Следи, треба одредити све a тако да важи

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1.$$

Заменом $x = 2\pi$ се добија $\cos(2a\pi) = 1$, одакле је $2a\pi = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, тј. a је цео број. Ако је $a = 0$, тражена релација је задовољена за свако реално x. Ако је $a \neq 0$, заменом $x = \dfrac{2\pi}{a}$ се добија $\cos\dfrac{2\pi}{a} = 1$, одакле је $\dfrac{2\pi}{a} = 2l\pi$ за неко $l \in \mathbb{Z}$, тј. и $\dfrac{1}{a}$ је цео број, па је $a \in \{-1, 1\}$. Ако је $a = 1$, тражена релација је задовољена за свако реално x. Ако је $a = -1$, тражена релација се своди на $\cos x = 1$, што не важи за свако реално x (на пример не важи за $x = \pi$).

Дакле, решење је $(a, b) \in \{(0,0), (1,0)\}$ (Тангента 53, стр. 41, Писмени задаци, задатак 1).

2. За свако $a \in \mathbb{R}$ једначина $f_a(x) = 0$ је квадратна и њена дискриминанта је $a^2 - 4(-2a-5) = a^2 + 8a + 20 = (a+4)^2 + 4 > 0$, тј. ова једначина има реална решења, одакле следи тврђење дела (а).

Теме параболе $Ax^2 + Bx + C$ је $\left(-\dfrac{B}{2A}, \dfrac{4AC - B^2}{4A}\right)$. Следи, теме параболе f_a је

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2} - 2a - 5\right) = \left(-\frac{a}{2}, -\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 5\right).$$

Функција $a \to -\dfrac{a}{2}$ је бијекција (из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$), па је једначина траженог геометријског места тачака $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Ако су $x_{1,a}$ и $x_{2,a}$ корени једначине $f_a(x) = 0$ (по делу (а) они су чак и реални и различити), по Виетовим правилима је $x_{1,a} + x_{2,a} = -a$ и $x_{1,a} \cdot x_{2,a} = -2a - 5$, па је $x_{1,a}^2 + x_{2,a}^2 = (x_{1,a} + x_{2,a})^2 - 2 \cdot x_{1,a} \cdot x_{2,a} = a^2 + 4a + 10 = (a+2)^2 + 6 \geqslant 6$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = -2$ (Тангента 50, стр. 34, Писмени задаци, задатак 3)

3. Мора бити $z^4 + 10z^2 + 3 \neq 0$, односно $z^2 \notin \left\{-\dfrac{1}{3}, -3\right\}$, тј. $z \notin \left\{-\sqrt{3}\,i, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,i, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,i, \sqrt{3}\,i\right\}$.

Под овим условом је $\dfrac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+10z^2+3} = 2 - 15\cdot\dfrac{z^2}{3z^4+10z^2+3}$, што је реалан број ако и само ако је

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{3z^4+10z^2+3}\in\mathbb{R} \quad&\Leftrightarrow\quad \left(z^2=0\vee\frac{3z^4+10z^2+3}{z^2}=10+3\cdot\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\in\mathbb{R}\right)\\ &\Leftrightarrow\quad \left(z^2=0\vee z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

Како је $t\in\mathbb{C}$ реалан број ако и само ако је $t=\overline{t}$, следи (уз додатни услов $z\neq 0$)

$$\begin{aligned}z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}\quad&\Leftrightarrow\quad z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\\ &\Leftrightarrow\quad z^4\overline{z}^2+\overline{z}^2-z^2\overline{z}^4-z^2=0\\ &\Leftrightarrow\quad \left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(z^2\overline{z}^2-1\right)=0\\ &\Leftrightarrow\quad (z-\overline{z})\,(z+\overline{z})\left(|z|^2-1\right)=0.\end{aligned}$$

Следи да је $z\in\mathbb{R}$ (ако је $z-\overline{z}=0$) или $z\in i\mathbb{R}$ (ако је $z+\overline{z}=0$) или $|z|=1$.

Коначно, следи да је $\dfrac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+10z^2+3}$ реалан ако и само ако је

$$z\in\mathbb{R}\cup\left\{ti|\ t\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}\right\}\cup\{t\mid t\in\mathbb{C}\wedge|t|=1\}.$$

4. Нека је $u+v=S_{u,v}$, $uv=P_{u,v}$. Тада је

$$\begin{aligned}u^4+v^4 &= (u+v)^4-4uv(u^2+v^2)-6u^2v^2\\ &= (u+v)^4-4uv(u+v)^2+2(uv)^2\\ &= S_{u,v}^4-4P_{u,v}S_{u,v}^2+2P_{u,v}^2.\end{aligned}$$

По условима задатка је $S_{a,b}=S_{x,y}$, па из $a^4+b^4=x^4+y^4$ следи

$$4P_{a,b}S_{a,b}^2-2P_{a,b}^2=4P_{x,y}S_{a,b}^2-2P_{x,y}^2\Leftrightarrow\left(P_{a,b}-P_{x,y}\right)\left(P_{a,b}+P_{x,y}-2S_{a,b}^2\right)=0.\qquad(*)$$

Ако је $P_{a,b}\neq P_{x,y}$, без умањења општости може се претпоставити да је $P_{a,b}>P_{x,y}$, па је

$$P_{a,b}+P_{x,y}-2S_{a,b}^2<2ab-2(a+b)^2=-2(a^2+ab+b^2)=-2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot b^2\right]\leqslant 0,$$

тј. у $(*)$ први чинилац мора бити једнак нули, односно $P_{a,b}=P_{x,y}$.

Из добијене контрадикције, следи да је и $P_{a,b}=P_{x,y}$. На основу Виетових правила, следи да су a,b корени једначине $t^2-S_{a,b}t+P_{a,b}=0$. Аналогно, x,y корени једначине $t^2-S_{x,y}t+P_{x,y}=0$, па, како је $S_{a,b}=S_{x,y}$ и $P_{a,b}=P_{x,y}$, следи да је $\{a,b\}=\{x,y\}$, одакле следи и тврђење задатка.

5. Осмословних речи које садрже по тачно два слова азбуке има $\dfrac{8!}{2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!}=2\,520$ (пермутације са понављањем).

Нека је X_i, $i\in S=\{\text{А},\text{Б},\text{В},\Gamma\}$, број осмословних речи, које свако слово садрже тачно два пута и које садрже два иста суседна слова i. Тада је број осмословних речи које садрже свако слово два пута и нису смислене једнак $\left|X_\text{А}\cup X_\text{Б}\cup X_\text{В}\cup X_\Gamma\right|$, односно, по принципу укључења и искључења:

$$\begin{aligned}\left|X_\text{А}\cup X_\text{Б}\cup X_\text{В}\cup X_\Gamma\right| &= \bigcup_{i\in S}|X_i|-\bigcup_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}}|X_i\cap X_j|+\bigcup_{\substack{i,j,k\in S\\ i\neq j\neq k\neq i}}|X_i\cap X_j\cap X_k|\\ &+\ \left|X_\text{А}\cap X_\text{Б}\cap X_\text{В}\cap X_\Gamma\right|\end{aligned}$$

Број $|X_i|$ је једнак броју пермутација са понављањем 7 елемената, једног састављеног од два слова i и три пара преосталих слова, тј. једнак је $\dfrac{7!}{2!\cdot2!\cdot2!\cdot1!}=630$.

Број $|X_i \cap X_j|$ је једнак броју пермутација са понављањем 6 елемената, једног састављеног од два слова i, једног састављеног од два слова j и два пара преосталих слова, тј. једнак је $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180$.

Број $|X_i \cap X_j \cap X_k|$ је једнак броју пермутација са понављањем 5 елемената, једног састављеног од два слова i, једног састављеног од два слова j, једног састављеног од два слова k и два преостала (иста) слова, тј. једнак је $\dfrac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 60$.

Број $\left|X_{\text{А}} \cap X_{\text{Б}} \cap X_{\text{В}} \cap X_{\text{Г}}\right|$ је једнак броју пермутација елемената АА, ББ, ВВ и ГГ, тј. једнак је $4! = 24$.

Коначно,

$$\left|X_{\text{А}} \cup X_{\text{Б}} \cup X_{\text{В}} \cup X_{\text{Г}}\right| = \binom{4}{1}\cdot 630 - \binom{4}{2}\cdot 180 + \binom{4}{3}\cdot 60 - \binom{4}{4}\cdot 24 = 1\,656,$$

па је тражени број (пошто треба наћи број смислених речи) једнак $2\,520 - 1\,656 = 864$.

Други разред, Б категорија

1. Ако је x_0 решење једначине из задатка, тада је $(-x_0)^2 - |x_0| + a = x_0^2 - |x_0| + a = 0$, тј. и $-x_0$ је решење те једначине. Ако једначина има јединствено решење, следи $x_0 = -x_0$, тј. $x_0 = 0$, одакле је $a = 0$.

Дакле, једначина је $x^2 - |x| = 0$. Међутим, ова једначина има три решења ($x \in \{-1, 0, 1\}$), тј. ни у овом случају решење није јединствено, па тражени реалан број не постоји (Тангента 47, стр. 15, Наградни задаци, М607).

2. Како је $\overline{z} = x - iy$ и $z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$, из $\overline{z} = z^2$ следи $x = x^2 - y^2$ и $-y = 2xy$. Из друге добијене једначине следи да је или $y = 0$ или $x = -\dfrac{1}{2}$.

1° Ако је $y = 0$, прва једначина постаје $x = x^2$, тј. $x \in \{0, 1\}$.

2° Ако је $x = -\dfrac{1}{2}$, прва једначина постаје $y^2 = \dfrac{3}{4}$, тј. $y \in \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

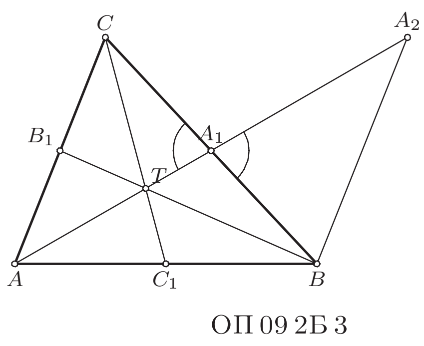
Дакле, решење задатка је $z \in \left\{0, 1, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right\}$ (Тангента 48, стр. 39, Писмени задаци, задатак 20, измењен).

3. Нека је T тежиште $\triangle ABC$. Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$, следи да су дужине AT, BT, CT једнаке $\dfrac{2}{3}\cdot t_a$, $\dfrac{2}{3}\cdot t_b$, $\dfrac{2}{3}\cdot t_c$, редом.

Из $\triangle BCT$ следи $\dfrac{2}{3}\cdot(t_b + t_c) > a$ (неједнакост троугла). Аналогно, из $\triangle ABT$ следи $\dfrac{2}{3}\cdot(t_a + t_b) > c$, а из $\triangle ACT$ следи $\dfrac{2}{3}\cdot(t_a + t_c) > b$. Сабирањем се добија

$$\frac{4}{3}\cdot(t_a + t_b + t_c) > a + b + c,$$

одакле је $t_a + t_b + t_c > \dfrac{3}{4}\cdot(a + b + c) = \dfrac{3}{2}\cdot s$.



ОП 09 2Б 3

Нека је A_1 средиште дужи BC, а A_2 таква да је да је $AA_1 = A_1A_2$ и $A - A_1 - A_2$.

Како је $\triangle ACA_1 \cong \triangle A_2BA_1$ ($BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$, $AA_1 = A_1A_2$, $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BA_1A_2$ (унакрсни углови)), следи $BA_2 = CA = b$, из $\triangle ABA_2$ следи $b + c > 2\,t_a$ (опет неједнакост троугла). Аналогно је $a + b > 2\,t_c$ и $a + c > 2\,t_b$. Сабирањем ових неједнакости добија се $2(a+b+c) > 2\,(t_a + t_b + t_c)$, одакле се добија $t_a + t_b + t_c < 2s$.

4. Видети решење другог задатка за други разред А категорије.

5. Први задатак није урадило највише 40 ученика (јер га је урадило бар 60), па је број парова ученика, таквих да ниједан од ученика у том пару није решио први задатак, највише $\binom{40}{2}$. Како аналогно закључивање важи и за преостале задатке, следи да је број парова ученика, таквих да ниједан од ученика у том пару није решио неки од задатака, не већи од $5 \cdot \binom{40}{2} = 3\,900$. Међутим, како је укупан број парова ученика $\binom{100}{2} = 4\,950 > 3\,900$, следи да постоји пар ученика који су заједно решили свих пет задатака (Тангента 45, стр. 16, Наградни задаци, M566).

Трећи разред, А категорија

1. Једначина има смисла за $x > 0$. Нека је $t = \log_{10} x$. Тада је

$$\begin{aligned}
& 10^{-3}x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x \\
\Leftrightarrow\quad & 10^{-3}10^{\log_{10}^2 x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3\right) = x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x^2} \cdot 10^{\log_{10}^2 x - 3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) = 1.
\end{aligned}$$

1° Ако је $t \in \{-1, 3\}$, тада је $t^2 - 2t - 3 = 0$ и $x = 10$, па следи да ове вредности доводе до решења једначине.

2° Ако је $t \in (-1, 3)$, тада је $t^2 - 2t - 3 < 0$, а како је и $x > 0$ следи $10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) < 10^0 + \frac{1}{x} \cdot 0 = 1$, па ове вредности не могу довести до решења једначине.

3° Ако је $t \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, тада је $t^2 - 2t - 3 > 0$, а како је и $x > 0$ следи $10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) > 10^0 + \frac{1}{x} \cdot 0 = 1$, па ове вредности не могу довести до решења једначине.

Дакле, решење једначине је $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10^3\right\}$ (Тангента 53, стр. 21, Наградни задаци, M732).

2. Услов $x \geqslant 4, y \geqslant 5, z \geqslant 6$ је еквивалентан постојању $a, b, c \geqslant 0$, таквих да је $x = 4 + a, y = 5 + b, z = 6 + c$. Дакле, довољно је доказати да ако је $a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c \geqslant 13$ за неке $a, b, c \geqslant 0$, тада је $a + b + c \geqslant 1$.

Нека је $a + b + c < 1$. Тада је $0 \leqslant a, b, c < 1$, па је $a^2 \geqslant a$, $b^2 \geqslant b$, $c^2 \geqslant c$, одакле је

$$13 > 13(a + b + c) \geqslant 9a + 11b + 13c \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c \geqslant 13.$$

Из добијене контрадикције, следи тврђење задатка.

Једнакост се постиже ако и само ако је $a + b + c = 1$, па следи (опет је $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$)

$$13 = 13(a + b + c) \geqslant 9a + 11b + 13c \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c \geqslant 13,$$

тј. једнакост се постиже ако и само ако је

$$4b + 2a = 0, \quad a^2 = a, \quad b^2 = b, \quad c^2 = c, \quad a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c = 13$$

(наравно, a, b, c су и даље ненегативни и $a+b+c=1$), односно ако и само ако је $a=b=0$, $c=1$, тј. ако и само ако је $(x,y,z)=(4,5,7)$.

3. Без умањења општости, може се претпоставити да је $(m,n)=1$. Иначе, ако је $m=d\cdot m_1$, $n=d\cdot n_1$ онда се проблем своди на аналоган за израз $1-z^{m_1}+z^{n_1}$ ($|z|=1\Leftrightarrow |z|^d=1$).

Нека је $m\neq 1$ и ω такво да је $\omega^m=-1$. Тада је $1-\omega^m+\omega^n=2+\omega^n$, па је довољно показати да постоји овакво ω, тако да је $\mathrm{Re}(\omega^n)\geqslant 0$. Решења једначине $z^m=-1$ су $\omega_0\cdot\varepsilon^k$, за $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, где је $\omega_0=\cos\dfrac{\pi}{m}+i\sin\dfrac{\pi}{m}$ и $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$. Како је $\omega_0+\omega_0\cdot\varepsilon+\ldots+\omega_0\cdot\varepsilon^{m-1}=\omega_0\cdot\left(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{m-1}\right)=0$ и како бројеви $0,n,\ldots,(m-1)n$ чине потпун систем остатака по модулу m (m и n су узајамно прости), следи $\omega_0^n+(\omega_0\cdot\varepsilon)^n+\ldots+\left(\omega_0\cdot\varepsilon^{m-1}\right)^n=\omega_0^n\cdot\left(1+\varepsilon^n+\ldots+\varepsilon^{(m-1)n}\right)=0$, па бар један од ових бројева има ненегативан реалан део („геометријски": ако је тачка 2 тежиште правилног m-тоугла, бар једно његово теме се налази у произвољној полуравни чији руб садржи тачку 2).

Случај $n\neq 1$ се ради аналогно (тј. аналогно се показује да међу решењима једначине $z^n=1$ постоји бар једно, тако да је реални део његовог m-тог степена непозитиван).

4. У низовима $(r_i)_{i=1}^n$ и $(t_i)_{i=1}^n$ се јавља број дељив са n; ако је $r_i\equiv t_j\equiv 0 \pmod n$ за неке $i\neq j$, тада је $r_it_i\equiv r_jt_j\equiv 0 \pmod n$, па у низу $(r_it_i)_{i=1}^n$ не може бити n различитих бројева, тј. он не може бити потпун систем остатака по модулу n.

Дакле, без умањења општости, нека је $r_n=t_n=0$. Нека је p прост чинилац броја n, $n=pm$. Притом, ако n није степен броја 2, може се изабрати $p\neq 2$. Како је производ бројева, од којих је један дељив са m, такође дељив са m и како у сваком потпуном систему остатака по модулу n има једнак број бројева дељивих са m, следи да се може претпоставити да су $r_1,r_2,\ldots,r_{p-1}$, $t_1,t_2,\ldots,t_{p-1}$ и $r_1t_1,r_2t_2,\ldots,r_{p-1}t_{p-1}$ бројеви конгруентни са $m,2m,\ldots,(p-1)m$ (у неком редоследу).

1° Ако $p\mid m$, тада за неко $i\in\{1,2,\ldots,p-1\}$ важи $r_it_i=m$, тј. за неке $k,l\in\mathbb{N}$ важи $n\mid klm^2-m$. Следи $pm\mid m(klm-1)$, па $p\mid klm-1$, што је немогуће, јер из $p\mid m$ следи $(p,klm-1)=1$.

2° Ако је $(p,m)=1$, по малој Фермаовој теореми је $m^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, а по Вилсоновој $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$, па следи

$$r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{p-1}\equiv m^{p-1}(p-1)!\equiv -1 \pmod p.$$

Аналогно је $t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_{p-1}\equiv -1 \pmod p$ и $(r_1t_1)\cdot(r_2t_2)\cdot\ldots\cdot(r_{p-1}t_{p-1})\equiv -1 \pmod p$, па је

$$\begin{aligned}1 &= (-1)\cdot(-1)\equiv (r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{p-1})\cdot(t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_{p-1})\\ &= (r_1t_1)\cdot(r_2t_2)\cdot\ldots\cdot(r_{p-1}t_{p-1})\equiv -1 \pmod p,\end{aligned}$$

па $p\mid 2$, тј. $p=2$. Како је бирано $p\neq 2$ (ако је то могуће), следи да је n степен броја 2. Међутим, по 1°, следи да је $n=2$, што је у контрадикцији са условом задатка.

5. На основу неједнакости између геометријске и хармонијске средине следи (за свако $j\in\{1,2,\ldots,n\}$)

$$\left(\prod_{i\neq j}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}\geqslant\frac{n-1}{\displaystyle\sum_{i\neq j}\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}}=\frac{n-1}{\displaystyle\sum_{i\neq j}\frac{x_i}{1+x_i}}=\frac{n-1}{n-1-\displaystyle\sum_{i\neq j}\frac{1}{1+x_i}}. \tag{†}$$

На основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине следи

$$\sum_{i\neq j}\frac{1}{1+x_i}\geqslant\frac{(n-1)^2}{\displaystyle\sum_{i\neq j}(1+x_i)}=\frac{(n-1)^2}{n-1+\displaystyle\sum_{i\neq j}x_i}=\frac{(n-1)^2}{n-x_j}. \tag{‡}$$

Из (†) и (‡) следи

$$\left(\prod_{i\neq j}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{n-1}{n-1-\dfrac{(n-1)^2}{n-x_j}} = \frac{n-x_j}{1-x_j}\,.$$

Множењем последњих неједнакости за $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ добија се неједнакост из задатка. Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ (на основу услова једнакости у горе примењеним неједнакостима средина) (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М597).

Друго решење. Функција $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ је конвексна ($f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x^2} > 0$; наравно, рачун извода се може избећи), па по Јенсеновој неједнакости следи (за свако $j \in \{1,2,\ldots,n\}$)

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}\ln\left(1+\frac{1}{x_i}\right) &\geqslant (n-1)\cdot\ln\left(1+\frac{n-1}{\sum\limits_{i\neq j}x_i}\right)\\ &= (n-1)\cdot\ln\left(1+\frac{n-1}{1-x_j}\right) = (n-1)\cdot\ln\left(\frac{n-x_j}{1-x_j}\right).\end{aligned}$$

Сабирањем претходних неједнакости за $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ и скраћивањем са $n-1$ добија се

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right),$$

а применом (растуће) функције e^x на последњу неједнакост и неједнакост из задатка. Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ ($f(x)$ је строго конвексна).

Напомена. Друго решење је симулација доказа *Караматине неједнакости*:

> *Нека је $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ конвексна функција и*
>
> $$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \succcurlyeq (y_1,y_2,\ldots,y_n)$$
>
> *$(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n \in \mathbb{R}^+)$, тада*
>
> $$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n)$$

($(x_1,x_2,\ldots,x_n) \succcurlyeq (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (*мајорација*) означава да важи

$$\sum_{i=1}^{n}x_i' = \sum_{i=1}^{n}y_i' \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k}x_i' \geqslant \sum_{i=1}^{k}y_i' \quad \text{за свако} \quad k \in \{1,2,\ldots,n-1\},$$

где је $(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ ($(y_1',y_2',\ldots,y_n')$) n-торка која је добијена од n-торке $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ($(y_1,y_2,\ldots,y_n)$) пермутацијом координата, тако да важи $x_1' \geqslant x_2' \geqslant \ldots \geqslant x_n'$ ($y_1' \geqslant y_2' \geqslant \ldots \geqslant y_n'$)).

Тврђење задатка непосредно следи из ове неједнакости примењене на функцију $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ и векторе $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, где је $y_i = \dfrac{1-x_i}{n-1}$.

Заиста, f је конвексна (видети друго решење задатка), а без умањења општости може се претпоставити да је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Тада је (очигледно) $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ и (за $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$)

$$k = k\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i = k\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i + \sum_{i=k+1}^{n}kx_i \leqslant k\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i + \sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}x_1\right) = n\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i,$$

па је (за $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$)

$$\sum_{i=1}^{k} y_{n-i+1} = \frac{k - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \frac{k - n(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Како је и

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n-1} = 1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

следи $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succcurlyeq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Трећи разред, Б категорија

1. Одузимањем прве једначине од друге и четврте, односно додавањем на трећу, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & my & + & z & = & 1, \\ & & y & + & 2mz & = & 3, \\ & & 2y & + & 3z & = & 4. \end{array}$$

Одузимањем двоструке треће једначине (новодобијеног система) од четврте, односно одузимањем треће једначине помножене са m од друге једначине, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & & (1-2m^2)z & = & 1-3m, \\ & & y & + & 2mz & = & 3, \\ & & & & (3-4m)z & = & -2. \end{array}$$

Из друге и четврте једначине последњег система следи $(3-4m)(1-3m) = (3-4m)(1-2m^2)z = -2(1-2m^2) \Rightarrow 0 = 8m^2 - 13m + 5 = (m-1)(8m-5)$.

Дакле:

1° ако је $m \notin \left\{\frac{5}{8}, 1\right\}$, систем нема решења;

2° ако је $m = 1$, систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & - & z & = & -2, \\ & & y & + & 2z & = & 3, \\ & & & - & z & = & -2 \end{array}$$

и има јединствено ршење $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$;

3° ако је $m = \frac{5}{8}$, систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & & \frac{7}{32}z & = & -\frac{7}{8}, \\ & & y & + & \frac{5}{4}z & = & 3, \\ & & & & \frac{1}{2}z & = & -2 \end{array}$$

и има јединствено ршење $(x, y, z) = (12, 8, -4)$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 5).

2. Нека су r, h и s, полупречник основе, висина и изводница, редом, те купе. Тада је површина основе купе једнака $r^2\pi$, а површина купе $r(r+s)\pi$, па из услова задатка следи да је $r(r+s)\pi = 4r^2\pi$, одакле је $s = 3r$.

Осни пресек ове купе је једнакокраки троугао чија је основа $2r$, висина h, а крак s, па по Питагориној теореми следи $r^2 + h^2 = s^2$, одакле је $r^2 + h^2 = 9r^2 \Leftrightarrow h^2 = 8r^2 \Leftrightarrow \dfrac{h}{r} = 2\sqrt{2}$ $(h, r > 0)$.

3. Видети решење другог задатка за други разред А категорије.

4. Видети решење петог задатка за други разред Б категорије.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је a основна ивица, а H висина пирамиде. Како је $V = B \cdot H$, следи $H = \dfrac{V}{a^2}$. Збир дужина свих ивица призме је $f(a) = 8a + 4H = 4 \cdot \left(2a + \dfrac{V}{a^2}\right)$ (за $a \in (0, \infty)$). За овакве a функција f је диференцијабилна и важи $f'(a) = 4 \cdot \left(2 - \dfrac{2V}{a^3}\right) = 8 \cdot \left(1 - \dfrac{V}{a^3}\right)$. Како је $f'(a) < 0$ за $a \in \left(0, \sqrt[3]{V}\right)$ (тј. на овом интервалу f опада), $f'(a) > 0$ за $a \in \left(\sqrt[3]{V}, \infty\right)$ (тј. на овом интервалу f расте), $f'(a) = 0$ за $a = \sqrt[3]{V}$ $(V > 0)$, следи да се у тачки $\sqrt[3]{V}$ достиже минимум функције f.

Ако је $a = \sqrt[3]{V}$, следи $H = \dfrac{V}{a^2} = \dfrac{a^3}{a^2} = a$, тј. у питању је коцка странице $\sqrt[3]{V}$, па је њена површина $P = 6a^2 = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \left(12\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \left(3^3 \cdot 2^3 \cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} = 36\sqrt[3]{2}$ (Тангента 53, стр. 22, Наградни задаци, М743).

2. Нека је табла смештена у координатни систем, тако да је центар поља које је доњи-леви угао табле $(0, 0)$, а центар поља које је горњи-десни угао табле $(8, 8)$. Тада је центар сваког поља табле тачка чије су обе координате целобројне, па се поља табле могу поистоветити са одговарајућим тачкама скупа $\{(m, n) \mid m, n, \in \mathbb{N}_0, 0 \leqslant m, n \leqslant 7\}$.

Ако су (k, l) и (m, n) поља табле нека је (њихово „растојање”)

$$\operatorname{dist}[(k, l), (m, n)] = |k - m| + |l - n|.$$

Тада је $\operatorname{dist}[(0, 0), (7, 7)] = 14$; један потез скакача може смањити вредност претходне функције највише за 3, па следи да је $k \geqslant 5$.

Међутим, на стандардно обојеној шаховској табли (наизменично црно-бело), поља $(0, 0)$ и $(7, 7)$ су исте боје, а скакач у сваком потезу може прећи само на поље супротне боје, па је за тражено пребацивање неопходан паран број скокова. Следи $k \geqslant 6$.

	1						
		1					

ОП 09 4А 2-1

1		**1**					
	1		**2**				
1				**1**			
			1				
2		**1**		**1**			

ОП 09 4А 2-2

	2		**1**				
2		**4**		**3**			
	3		**2**		**3**		
1		**4**		**2**		**1**	
	8		**4**		**4**		
2		**8**		**3**		**2**	
	2		**1**		**2**		

ОП 09 4А 2-3

Како низом потеза $(0, 0) \to (1, 2) \to (2, 0) \to (3, 2) \to (5, 3) \to (6, 5) \to (7, 7)$ скакач прелази из $(0, 0)$ у $(7, 7)$, следи да је $k = 6$.

Нека је за свако поље познато на колико начина је могуће доћи до њега у n потеза (полазећи са $(0, 0)$). За произвољно поље P, нека су сва поља са којих се у једном потезу може доћи у P „поља суседна са P”. Тада је број начина на који је могуће поставити скакача на поље P након $n+1$ потеза једнак је збиру броја начина доласка на сва поља суседна са P након n потеза.

На тај начин је могуће формирати таблицу броја начина доласка у произвољно поље након n потеза (на сликама ОП 09 4А 2-(1-3) је приказана ова таблица за $n \in \{1,2,3\}$; уколико је тај број 0, поља таблица су празна).

Аналогна таблица се може направити за број начина доласка на произвољно поље у n потеза полазећи са поља $(7,7)$; због симетрије, та таблица за неко n се може добити и од претходне таблице (тј. таблице добијене полазећи са поља $(0,0)$) симетијом у односу на главну дијагоналу таблице (тј. уписивањем у поље (m,n) вредности која се налазила у пољу $(7-n, 7-m)$). Да би се у шест потеза дошло из $(0,0)$ у $(7,7)$, потребно је у три потеза доћи са $(0,0)$ до неког поља, а након тога у још три потеза са тог поља до $(7,7)$.

	2·2		**1·3**				
		4·4		**3·4**			
	3·1		**2·2**		**3·4**		
		4·3		**2·2**		**1·3**	
			4·3		**4·4**		
				3·1		**2·2**	

ОП 09 4А 2-4

Следи да је тражени број збир бројева из таблице ОП 09 4А 2-4 (ако је на пољу уписано $k \cdot l$, то значи да се од $(0,0)$ до тог поља у три потеза може доћи на k начина, а од тог поља до $(7,7)$ у три потеза на l начина; ако је неки од ових бројева 0, поље таблице је остављено празно).

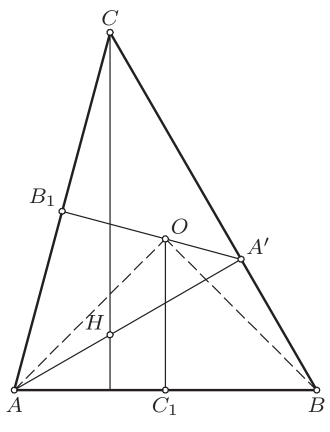
Дакле, најмањи број потеза који је потребан за тражено пребацивање је $k=6$ и то се може урадити на $4 \cdot (4 \cdot 3 + 3 \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 108$ начина.

3. Нека је A' подножје нормале из темена A троугла ABC, B_1 средиште странице AC, а C_1 средиште странице AB.

По условима задатка $\triangle AA'C$ је правоугли (са правим углом код темена A'), при чему је подножје висине из темена A' средиште странице AC, тј. овај троугао је и једнакокраки (тј. $\sphericalangle BCA = 45^\circ$).

Троугао OC_1B је правоугли и $\sphericalangle BOC_1 = \sphericalangle BCA = 45^\circ$ (централни и периферијски угао).

Такође, важи $CH = 2 \cdot OC_1$ (хомотетија чији је центар тачка описане кружнице $\triangle ABC$ дијаметрално супротна тачки C, и коефицијента 2, слика дуж OC_1 у CH).



ОП 09 4А 3

Дакле, $\dfrac{CH}{BO} = 2 \cdot \dfrac{CO_1}{BO} = \sqrt{2}$ (CO_1 и BO су катета и хипотенуза једнакокрако-правоуглог $\triangle BOC_1$) (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М593).

4. Видети решење трећег задатка за трећи разред А категорије.

5. Нека је $N \in \mathbb{N}$, q_1 такво да важи $a_n \equiv a_{n+q_1} \pmod N$ почев од неког n (по условима задатка такво q_1 постоји), q_2 такво да важи $a_n \equiv a_{n+q_2} \pmod{\varphi(N)}$ почев од неког n (по условима задатка такво q_2 постоји) и $p = \text{НЗС}(q_1, q_2)$. Довољно је показати да је $a_n^{a_n} \equiv a_{n+p}^{a_{n+p}} \pmod N$ (почев од неког n).

Како $q_1 \mid p$, следи $a_{n+p} \equiv a_n \pmod N$ (почев од неког n), тј. $a_{n+p}^{a_{n+p}} \equiv a_n^{a_{n+p}} \pmod N$, па следи да је довољно показати да $N \mid a_n^{a_{n+p}} - a_n^{a_n} = a_n^{a_n} \cdot \left(a_n^{a_{n+p}-a_n} - 1\right)$ (почев од неког n).

Нека је $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја N. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, почев од неког n важи $a_n \geqslant \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. За фиксно a_n са овим својством, постоји јединствено разлагање $N = N_1 \cdot N_2$, тако да је сваки прост фактор броја N_1 и прост фактор броја a_n и $(a_n, N_2) = 1$. Ако је p_i неки прост фактор броја N_1, следи да $p_i^{a_n} \mid a_n^{a_n}$, па и $p_i^{\alpha_i} \mid a_n^{a_n}$, одакле $N_1 \mid a_n^{a_n}$. Како је $(N_2, a_n) = 1$, следи $a_n^{\varphi(N_2)} \equiv 1 \pmod{N_2}$, па како $\varphi(N_2) \mid \varphi(N)$, $q_2 \mid p$ и $a_{n+q_2} \equiv a_n \pmod{\varphi(N)}$ (почев од неког n), следи $N_2 \mid \left(a_n^{a_{n+p}-a_n} - 1\right)$. Дакле, почев од неког n важи $N \mid a_n^{a_{n+p}} - a_n^{a_n}$.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ a & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & a & a \\ a-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2a + 4 = (-2)(a-2), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3),
\end{aligned}$$

за $a \notin \{2, 3\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве a систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{1}{a-3}, -\frac{2}{a-3}, 1\right).$$

Ако је $a = 3$, тада је $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta = 0$, па у овом случају систем нема решења.

Ако је $a = 2$ систем постаје

$$\begin{aligned}
2x + y - z &= -1, \\
-4x - 2y + 2z &= 2, \\
x + y + z &= 2.
\end{aligned}$$

Одузимањем двоструке треће једначине од прве, односно додавењем четвороструке треће другој, добија се еквивалентан систем

$$\begin{aligned}
-y - 3z &= -5, \\
2y + 6z &= 10, \\
x + y + z &= 2.
\end{aligned}$$

односно (како су прва и друга једначина еквивалентне)

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 2, \\
-y - 3z &= -5,
\end{aligned}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = 5 - 3z$ и $x = 2 - y - z = 2 - (5 - 3z) - z = 2z - 3$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\{(2z - 3, 5 - 3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(Тангента 42, стр. 44, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како је површина паралелограма над векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ једнака $|\vec{x}\times\vec{y}| = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot|\sin\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})|$, $\vec{x}\times\vec{x}=0$, $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$ и како је (по условима задатка) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$, следи да је тражена површина једнака

$$\begin{aligned}|\vec{p}\times\vec{q}| &= \left|(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})\right| = \left|2\vec{a}\times\vec{a}+4\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}\right| = \left|7\cdot\vec{b}\times\vec{a}\right| \\ &= 7\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})| = 7\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

3. По условима задатка, бочна страна пирамиде је једнакокраки правоугли троугао, чија је хипотенуза дужине 2, па је површина сваке (од три) бочне стране једнака 1 (краци тог троугла су дужине $\sqrt{2}$, па је његова површина $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1$). Основа пирамиде је једнакостранични троугао странице 2, па је његова површина $\dfrac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

Дакле, површина пирамиде је $3\cdot 1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ (Тангента 53, стр. 38, Писмени задаци, задатак 2).

4. Израз $\log_2(x(1-x))$ је дефинисан ако и само ако је $x(1-x)>0$, тј. ако и само ако је $x\in(0,1)$. Израз $-2+\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|$ је дефинисан ако и само ако је $x\neq 0$.

Дакле, једначина има смисла ако и само ако је $x\in(0,1)$. За такве x важи $x>0$ и $1-x>0$, па, по неједнакости између аритметичке и геометријске средине, следи $x(1-x)\leqslant\left(\dfrac{x+(1-x)}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, одакле је (функција $\log_2 x$ је растућа) $\log_2(x(1-x))\leqslant\log_2\dfrac{1}{4}=-2$. Притом једнакост важи ако и само ако је $x=1-x$, тј. ако и само ако је $x=\dfrac{1}{2}$. Како је апсолутна вредност ненегативна, следи

$$-2\geqslant\log_2(x(1-x))=-2+\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\geqslant -2,$$

па у претходном низу на сваком месту мора важити једнакост. Следи да мора бити $x=\dfrac{1}{2}$.

Провером, следи да $x=\dfrac{1}{2}$ и јесте решење (Тангента 51, стр. 49, Писмени задаци, задатак 4).

5. Видети решење другог задатка за четврти разред А категорије.