РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Како је $5^{10^{5^{10}}}$ непаран број, следи да је $10^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv (-1)^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv -1 \pmod{11}$.

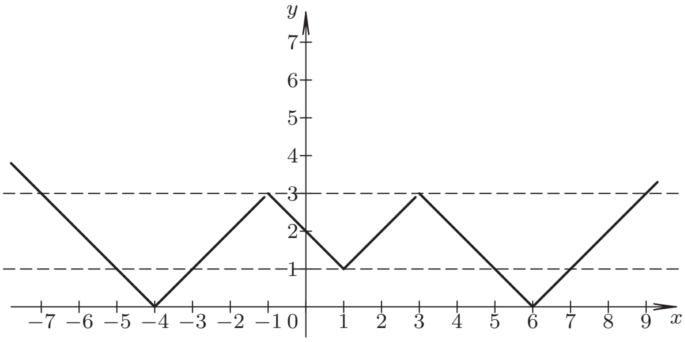
Како је $5^5 = 5 \cdot 25 \cdot 25 \equiv 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$ и како је број $10^{5^{10^5}}$ дељив са 5, следи $5^{10^{5^{10^5}}} \equiv 1 \pmod{11}$.

Следи $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^5}}} \equiv -1 + 1 = 0 \pmod{11}$, да овај број је дељив са 11 (Тангента 49, стр. 12, М644, Наградни задаци, решење у Тангенти 50, стр. 11).

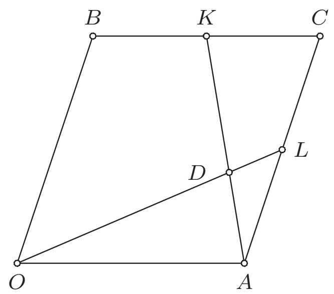
2. Нека је $f(x) = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|$. Како је $|x-1|-2 = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x < 1 \\ x-3, & \text{за } x \geqslant 1 \end{cases}$, следи да је

$$\big||x-1|-2\big|-3 = \begin{cases} -x-4, & \text{за } x < -1 \\ x-2, & \text{за } -1 \leqslant x < 1 \\ -x, & \text{за } 1 \leqslant x < 3 \\ x-6, & \text{за } x \geqslant 3 \end{cases}, \text{ па је } f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{за } x < -4 \\ x+4, & \text{за } -4 \leqslant x < -1 \\ 2-x, & \text{за } -1 \leqslant x < 1 \\ x, & \text{за } 1 \leqslant x < 3 \\ 6-x, & \text{за } 3 \leqslant x < 6 \\ x-6, & \text{за } x \geqslant 6 \end{cases}.$$

Права паралелна x-оси може сећи овај график у највише 6 тачака, што се догађа за $1 < a < 3$.



ОП 08 1А 2



ОП 08 1А 3

3. Нека тачке O, A, B, C, K, L, D одговарају Ољиној кући, Аниној кући, банки, цркви, Костиној кући, Лазиној кући, дрвету, редом. По условима задатка $OABC$ је позитивно оријентисан паралелограм. Нека је $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Тада је

$$\overrightarrow{OD} = m \cdot \overrightarrow{OL} = m \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AD} = n \cdot \overrightarrow{AK} = n \cdot \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{a}\right).$$

Како је $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$, следи $m \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} + n \cdot \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{a}\right)$, одакле је

$$\left(m + \frac{1}{2} \cdot n - 1\right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \cdot m - n\right) \cdot \vec{b} = \vec{o},$$

па како су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколинеарни мора бити

$$m + \frac{1}{2} \cdot n - 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2} \cdot m - n = 0.$$

Решавањем овог система добија се $m = \dfrac{4}{5}$ и $n = \dfrac{2}{5}$, одакле је $\overrightarrow{KD} = \dfrac{3}{5} \cdot \overrightarrow{KA}$, па ће Ана од Костине куће до старог дрвета прећи пут дужине $1,2km$.

4. Нека је количина траве коју поједе једна крава за један дан x, количина траве која израсте на ливади за један дан y, а почетна количина траве на ливади z. По условима задатка је

$$24 \cdot 60x = z + 24y \quad \text{и} \quad 60 \cdot 30x = z + 60y,$$

одакле је $y = 10x$ и $z = 24 \cdot 60x - 24 \cdot 10x = 24 \cdot 50x$.

Из $y = 10x$ следи да је одговор на питање дела (б) никад, јер за један дан израсте тачно онолико траве колико 10 крава попасе.

Ако a крава попасе ливаду за 100 дана, следи $a \cdot 100x = z + 100y = 24 \cdot 50x + 1000x = 22 \cdot 100x$, одакле је $a = 22$, тј. одговор на питање дела (а) је 22 краве.

5. Уоченом избору 5 књига тако да никоје две изабране књиге нису суседне, може се придружити низ нула и јединица, тако што је i-ти члан низа 1 ако је i-та књига изабрана, а 0 ако није. Овако добијен низ се састоји од 9 нула и 5 јединица и притом никоје две јединице нису суседне.

Међутим, и сваком низу који се састоји од 9 нула и 5 јединица и притом никоје две јединице нису суседне одговара један избор књига који задовољава услове задатка, па тражених избора има колико оваквих низова.

Са друге стране, овакав низ се може видети као распоређивање 5 јединица на 10 места (пре прве нуле, између i-те и $i+1$-ве нуле за $i \in \{1, 2 \dots, 8\}$ и после 9-те нуле), па је укупан број оваквих низова $\binom{10}{5} = 252$ (Тангента 48, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2).

Први разред, Б категорија

1. Како петоцифрених бројева записаних непарним цифрама има 5^5 (свака од 5 цифара може се изабрати на 5 начина), а петоцифрених бројева записаних цифрама $\{3, 5, 7, 9\}$ има 4^5 (свака од 5 цифара може се изабрати на 4 начина), то петоцифрених бројева записаних непарним цифрама, међу којима је бар једна јединица има $5^4 - 4^4$ (Тангента 48, стр. 37, Писмени задаци, задатак 18).

2. Нека је $5p + 1 = x^2$ за неко $x \in \mathbb{N}$. Следи $5p = (x-1)(x+1)$, па како су 5 и p прости, постоје следеће могућности:

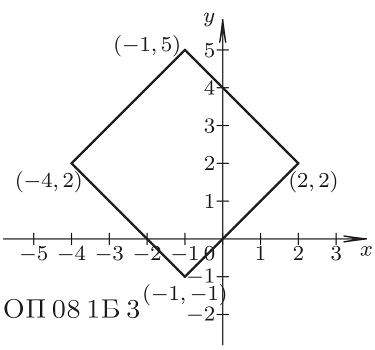
1. $x - 1 = 5$, $x + 1 = p$, одакле је $p = 7$ $(5 \cdot 7 + 1 = 6^2)$;
2. $x + 1 = 5$, $x - 1 = p$, одакле је $p = 3$ $(5 \cdot 3 + 1 = 4^2)$;
3. $x - 1 = 1$, $x + 1 = 5p$, одакле је $5p = 3$, тј. у овом случају нема решења (тривијално не може бити $x - 1 = 5p$, $x + 1 = 1$, јер је $5p > 1$ и $x - 1 < x + 1$).

Дакле, p може бити 3 или 7 (Тангента 44, стр. 36, Писмени задаци, задатак 16).

3. Како је $|a| = \begin{cases} a, & \text{за } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{за } a < 0 \end{cases}$, следи да је линија из задатка

$$\begin{aligned} x+1+y-2 &= 3, \quad \text{тј. } y = 4 - x, \quad \text{за } x \geqslant -1 \wedge y \geqslant 2, \\ x+1-y+2 &= 3, \quad \text{тј. } y = x, \quad \text{за } x \geqslant -1 \wedge y < 2, \\ -x-1+y-2 &= 3, \quad \text{тј. } y = 6 + x, \quad \text{за } x < -1 \wedge y \geqslant 2, \\ -x-1-y+2 &= 3, \quad \text{тј. } y = -x - 2, \quad \text{за } x < -1 \wedge y < 2, \end{aligned}$$

односно квадрат чија су темена $(-1, 5)$, $(-1, -1)$, $(2, 2)$ и $(-4, 2)$ (на пример убацивањем $x = -1$ и $y = 2$ у горње једначине). Дијагонала овог квадрата је $6 = 5 - (-1) = 2 - (-4)$, па је тражена површина $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ (Тангента 44, стр. 35, Писмени задаци, задатак 10).



ОП 08 1Б 3

4. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

5. Видети решење четвртог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $p = 2^{2^n} + 1 = k^5 - l^5 = (k-l)(k^4 + k^3 l + k^2 l^2 + kl^3 + l^4)$ за неке $k, l \in \mathbb{N}$. Како је p прост и $k^4 + k^3 l + k^2 l^2 + kl^3 + l^4 > k - l$, следи да је $k - l = 1$, па је $2^{2^n} + 1 = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$, одакле је $2^{2^n} = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$, што је немогуће (5 не може делити степен двојке) (Тангента 47, стр. 16, Наградни задаци, М609, решење у Тангенти 48, стр. 17).

2. Заменом a и c добија се трином $cx^2 + bx + a$, чија је дискриминанта једнака дискриминанти полазног тринома.

Друга операција чува разлику нула једначине $ax^2 + bx + c = 0$. Како за дискриминанту тринома $ax^2 + bx + c$ важи $b^2 - 4ac = a^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 4 \cdot \frac{c}{a}\right) = a^2 \cdot \left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2\right) = a^2(x_1 - x_2)^2$, где су x_1 и x_2 нуле једначине $ax^2 + bx + c = 0$ (по Виетовим правилима је $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$) ни друга операција не мења дискриминанту.

Како је дискриминанта тринома $x^2 - x - 2$ једнака $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, а тринома $x^2 - x - 1$ једнака $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, следи да је одговор на питање дела (а) негативан (Тангента 44, стр. 18, Наградни задаци, М548, решење у Тангенти 45, стр. 20).

Одговор на питање дела (б) је позитиван, јер је (на пример):

$$x^2 - x - 2 \quad \xrightarrow{2.\ \text{за}\ x=-2} \quad x^2 - 5x + 4 \quad \xrightarrow{1.} \quad 4x^2 - 5x + 1 \quad \xrightarrow{2.\ \text{за}\ x=1} \quad 4x^2 + 3x.$$

3. Постоји. Нека је $|z| = 1$. Тада је $|z^{2008}| = |z|^{2008} = 1$ и $|z^{2007}| = |z|^{2007} = 1$, односно тачке које одговарају бројевима z^{2007} и z^{2008} налазе се на јединичној кружници. Уколико постоји број z такав да је $z^{2007} = -1$ и $z^{2008} \notin \{1, -1\}$, тада је троугао чија су темена тачке одређене бројевима 1, z^{2007} и z^{2008} правоугли (хипотенуза тог троугла је дуж одређена тачкама које одговарају бројевима 1 и z^{2007}), па је довољно доказати да постоји број z са наведеним особинама.

Нека је $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тада је $z_0^3 = -1$, па је $z_0^{2007} = (z_0^3)^{669} = (-1)^{669} = -1$ и $z_0^{2008} = z_0 \cdot z_0^{2007} = -z_0 \notin \{-1, 1\}$, односно z_0 је број са траженим особинама.

4. По условима задатка сва три тангеса су истог знака, па је $\triangle ABC$ оштроугли. Како је

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

следи да (у произвољном неправоуглом троуглу) важи

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma. \qquad (*)$$

Ако је $k = \operatorname{tg}\alpha$, тада је $\operatorname{tg}\beta = 2k$ и $\operatorname{tg}\gamma = 3k$, па из $(*)$ следи $6k = 6k^3$, односно $k = 1$ (јер је $k > 0$).

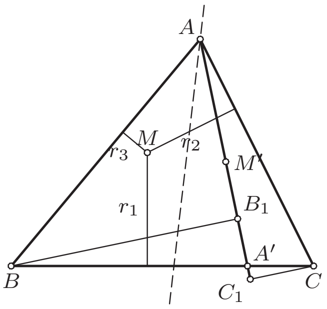
Како су углови оштри, следи $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, па је $BC = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \sqrt{5}$ и $AC = AB \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 2\sqrt{2}$ (синусна теорема).

Коначно, обим $\triangle ABC$ је $AB + BC + CA = 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$. (Тангента 45, стр. 18, Наградни задаци, М579, решење у Тангенти 46, стр. 27).

5. Ако је M' тачка симетрична са M у односу на симетралу $\sphericalangle BAC$, растојање тачке M' од правих AB и AC је r_2 и r_3, редом, и тачка M' се налази у $\sphericalangle BAC$, па права AM' сече дуж BC у некој тачки A'. Нека су B_1 и C_1 подножја нормала из B и C, редом, на AM'. Како је $BC = BA' + A'C \geqslant BB_1 + CC_1$ и $AM' = R_1$, следи

$$BC \cdot R_1 \geqslant BB_1 \cdot R_1 + CC_1 \cdot R_1 = 2 \cdot P(\triangle M'AB) + 2 \cdot P(\triangle M'AC)$$

($P(\triangle XYZ)$ представља површину $\triangle XYZ$), одакле је $aR_1 \geqslant cr_2 + br_3$, тј. $R_1 \geqslant \frac{c}{a} \cdot r_2 + \frac{b}{a} \cdot r_3$.



ОП 08 2А 5

Аналогно је $R_2 \geqslant \dfrac{a}{b}\cdot r_3+\dfrac{c}{b}\cdot r_1$ и $R_3 \geqslant \dfrac{b}{c}\cdot r_1+\dfrac{a}{c}\cdot r_2$, одакле је (како за $x,y>0$ важи $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$)

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)r_1+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)r_2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)r_3 \geqslant 2(r_1+r_2+r_3).$$

Једнакост важи ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан, а тачка M његово тежиште (Тангента 49, стр. 5, Неке неједнакости у вези са троуглом, неједнакост (Б)).

Напомена. Ова неједнакост је позната и као Erdős–Mordell-ова неједнакост.

Други разред, Б категорија

1. Како је површина $\triangle ABC$ једнака збиру површина троуглова MAB, MBC и MCA, ове три површине су једнаке трећини површине $\triangle ABC$.

Како $\triangle ABC$ и $\triangle MAB$ имају заједничку страницу AB и како је однос њихових површина $3:1$, висина $\triangle ABC$ која одговара страници AB је три пута већа од висине $\triangle MAB$ која одговара страници AB, тј. тачка M се налази на правој паралелној правој AB, која се налази у истој полуравни одређеној правом AB у којој и тачка C и која је на растојању од праве AB једнаком трећини висине $\triangle ABC$ која одговара страници AB.

Аналогно, тачка M се налази на правој паралелној правој BC, која се налази у истој полуравни одређеној правом BC у којој и тачка A и која је на растојању од праве BC једнаком трећини висине $\triangle ABC$ која одговара страници BC, па (ако постоји) тачка M мора бити јединствена (праве паралелне двема различитим страницама неког троугла нису паралелне, па се секу).

Са друге стране, како тежиште троугла дели тежишне дужи у односу $2:1$, растојање од тежишта троугла до неке странице тог троугла је једнако трећини висине која одговара тој страници, па тежиште троугла задовољава услове задатка.

Дакле, једина тачка која задовољава услове задатка је тежиште троугла.

2. Изрази из задатка су дефинисани за $z\neq 2$. Како је (за $z\neq 2$)

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{z-3}{2-\overline{z}}\cdot\overline{\left(\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right)}=1 \Leftrightarrow (z-3)(\overline{z}-3)=(2-\overline{z})(2-z)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-3\overline{z}-3z+9=z\overline{z}-2\overline{z}-2z+4 \Leftrightarrow z+\overline{z}=5,$$

одакле је $\operatorname{Re} z=\dfrac{5}{2}$, јер је $\omega+\overline{\omega}=2\cdot\operatorname{Re}\omega$ за свако $\omega\in\mathbb{C}$.

Слично је

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}+\overline{\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right)}=4$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2z-9i}{1-i}+\frac{2\overline{z}+9i}{1+i}=4 \Leftrightarrow (2z-9i)(1+i)+(2\overline{z}+9i)(1-i)=8$$
$$\Leftrightarrow \quad 2z-9i+2iz+9+2\overline{z}+9i-2i\overline{z}+9=8$$
$$\Leftrightarrow \quad -2i(z-\overline{z})=10+2(z+\overline{z})=10+4\cdot\operatorname{Re} z.$$

Како је $\operatorname{Re} z = \dfrac{5}{2}$ и како је $\omega - \overline{\omega} = 2i \cdot \operatorname{Im}\omega$ за свако $\omega \in \mathbb{C}$, следи $4 \cdot \operatorname{Im} z = 20$, тј. $\operatorname{Im} z = 5$.

Дакле, $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{5}{2} + 5i$ (Тангента 41, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5).

3. Једначина из задатка није дефинисана за $x \in \{-2, 0, 2\}$.

За $x \neq -2, 0, 2$ важи

$$\begin{array}{rccc} & \dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} & = & \dfrac{1}{x^2-2x} \\ \Leftrightarrow & 2x + (x-4)(x-2) & = & x+2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 5x + 6 & = & 0, \end{array}$$

а последња квадратна једначина има решења $x = 2$ и $x = 3$.

Међутим, како једначина није дефинисана за $x = 2$, једино решење је $x = 3$ (Тангента 42, стр. 42, Писмени задаци, задатак 1).

4. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

5. Ако први уторак у месецу није и први дан у месецу, први уторак у месецу је истовремено и први уторак после првог понедељка у месецу, па по условима задатка следи да је први уторак у првопоменутом месецу и први дан тог месеца. Аналогно, у следећем месецу је среда први дан тог месеца.

Дакле, првопоменути месец има $7k+1$ дана (за неко $k \in \mathbb{N}$), а како месеци имају 28, 29, 30 или 31 дан, следи да је тај месец фебруар и да је година преступна.

Дакле, следећи месец је март, а 8. март је прва среда после првог уторка у том месецу, тј. Марија је 8. март провела на Златибору.

Трећи разред, А категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 4 = (a-2)^2(a+1), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1-a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a + 0 + (a-1)^2 - a(a-1) - 1 - 0 = 0, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a - a^2 = -(a-2)(a+1), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1-a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 + 2a^2 + a - 2 = -(a-2)(a+1)(a-1),
\end{aligned}$$

за $a \notin \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па систем за ове a има једно решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(0, -\frac{1}{a-2}, -\frac{a-1}{a-2}\right).$$

За $a = 2$ прва једначина система гласи $x+y-z = 2$, а трећа $x+y-z = 0$, па у овом случају систем нема решења (што се могло закључити и из тога што је $a = 2$ двострука нула Δ, а једнострука Δ_y и Δ_z).

За $a = -1$ систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ 2x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & - & 2y & - & z & = & 0. \end{array}$$

Одузимањем прве једначине од треће, односно двоструке прве једначине од друге, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \end{array}$$

односно

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \end{array}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = -z - \dfrac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 + z + \dfrac{1}{3} - 2z = -z - \dfrac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

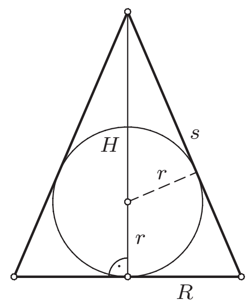
$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

(Тангента 42, стр. 39, Писмени задаци, задатак 4).

2. Нека је r полупречник лопте, а R, H и s полупречник основе, висина и изводница купе описане око те лопте, редом.

Изражавањем површине осног пресека купе на два начина, добија се $RH = (R + s)r$, одакле је $\dfrac{RH}{r} = R+s$, па је $\dfrac{R^2H}{4r^3} = \dfrac{R(R+s)}{4r^2}$, односно $\dfrac{\frac{1}{3} \cdot R^2 H\pi}{\frac{4}{3} \cdot r^3\pi} = \dfrac{R(R+s)\pi}{4r^2\pi}$, тј.

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{P_K}{P_L}.$$



ОП 08 ЗА 2

3. Ако је $x = 1$ сви наведени бројеви су међусобно једнаки.

Нека је $0 < x < 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно опадајућа ако јој је основа мања од 1, следи

$$0 < x < 1 \;\Rightarrow\; x^0 > x^x > x^1 \;\Rightarrow\; x^1 < x^{x^x} < x^x \;\Rightarrow\; x^x > x^{x^{x^x}} > x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}},$$

па је (за $0 < x < 1$) тражени распоред

$$x < x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}} < x^x.$$

Нека је $x > 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно растућа ако јој је основа већа од 1, следи

$$1 < x \;\Rightarrow\; x^1 < x^x \;\Rightarrow\; x^x < x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^x}} \;\Rightarrow\; x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}},$$

па је (за $x > 1$) тражени распоред

$$x < x^x < x^{x^x} < x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Из услова 3 задатка следи

$$\frac{f(ab)}{ab} = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b},$$

па ако је $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, захтев задатка постаје да се одреде сви $n \in \mathbb{N}$ такви да је $g(n) = 1$, где је $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1. $g(1) = 0$;
2. $g(p) = \dfrac{1}{p}$ за сваки прост број p;
3. $g(ab) = g(b) + g(a)$ за све природне a и b.

Из новог услова 3 следи да за $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (канонска факторизација броја n) важи $g(n) = \alpha_1 g(p_1) + \alpha_2 g(p_2) + \ldots + \alpha_k g(p_k)$, па треба одредити све n за које је

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1. \tag{‡}$$

Сви сабирци у претходној једнакости су позитивни, па је $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})\ \alpha_i \leqslant p_i$. Након множења исте једнакости са $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, добија се једнакост у којој су сви сабирци сем једног дељиви са p_i, па и тај сабирак $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot \dfrac{\alpha_i}{p_i})$ мора бити дељив са p_i, па $p_i \mid \alpha_i$, одакле је $\alpha_i \geqslant p_i$ (за свако $\{1, 2, \ldots, k\}$).

Следи да су сви сабирци у (‡) једнаки 1, па се у тој једнакости појављује само један сабирак, односно тражени бројеви су бројеви облика p^p, где је p прост број (Тангента 44, стр. 18, Наградни задаци, М554, решење у Тангенти 45, стр. 22).

5. Нека је смањивање за 1 свих бројеве неке колоне прва, а удвостручавање свих бројева неке врсте друга операција и нека се на табли врши следећи алгоритам:

1. уочи се колона те табле;
2. примењује прва операција, док најмањи елемент те колоне не постане 1 (скуп $\mathbb{N}$ је ограничен одоздо, па је ово могуће урадити);
3. ако су сви елементи те колоне једнаки 1, алгоритам се завршава, а иначе се на све врсте које одговарају елементима те колоне који су једнаки 1 примени друга операција, а након тога врати на корак 2.

Алгоритам се завршава. Заиста, највећи број у тој колони (може их бити и више) се након прве операције смањи за 1, као и након примене корака 3 па 2 претходног алгоритма, па ће сви елементи уочене колоне у једнаом моменту постати једнаки 1. Поновном применом прве операције сви елементи те колоне постају 0.

Примена прве операције на некој колони не мења елементе осталих колона те табле, а примена друге операције природне бројеве слика у природне, док елементи који су једнаки 0 остају 0. Следи да су након горњег алгоритма сви бројеви других колона остали природни (ако су били природни), односно 0 (ако су били 0), па се понављањем алгоритма на свим колонама ове табле добија табла у којој су сви бројеви једнаки 0.

Трећи разред, Б категорија

1. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

2. Једначина из задатка је дефинисана за $x \neq 0$.

Како је $(\forall \varphi) |\sin \varphi| \leqslant 1$, следи да је

$$|L| = \left| 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{6}\right) \right| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске неједнакости, следи

$$D = \frac{1}{x^2} + x^2 \geqslant \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot x^2} = 2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2 = 1$, тј. $x \in \{-1, 1\}$.

Како је $L = D$, мора бити $L = D = 2$, тј. $x \in \{-1, 1\}$. Међутим, како је

$$2 \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{1}{6}\right) \neq 2 \neq 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{-1}{6}\right),$$

следи да ова једначина нема решења у скупу реалних бројева (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М591, решење у Тангенти 47, стр. 19).

3. Последње четири екипе су међусобно одиграле $\dbinom{4}{2} = 6$ мечева и у њима је освојено

$6 \cdot 2 = 12$ поена. Сваки од ових поена је припао једној од последње четири екипе. Како су оне освојиле $6 + 4 + 2 + 2 = 14$ поена, последње четири екипе су у утакмицама против прве четири екипе освојиле $14 - 12 = 2$ поена, тј. последње четири екипе победиле су прве четири екипе у једној утакмици, односно последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе у $4 \cdot 4 - 1 = 15$ утакмица (укупан број утакмица које су последње четири екипе одиграле против прве четири екипе је $4 \cdot 4 = 16$) (Тангента 49, стр. 13, Наградни задаци, М651, решење у Тангенти 50, стр. 14).

4. Једначине из задатка су дефинисане за $\dfrac{xy}{2} > 0$, $|x - y| > 0$ и $|x - y| \neq 1$.

Из друге једначине следи $(x - 1)(y - 1) = 0$, одакле је $x = 1$ или $y = 1$.

Ако је $y = 1$, из прве једначине следи $\dfrac{x}{2} = |x - 1|^2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, одакле је $2x^2 - 5x + 2 = 0$, тј. $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$. Међутим, ако је $x = 2$, тада је $|x - y| = |2 - 1| = 1$, па ово није решење.

Како је систем симетричан по x и y, за $x = 1$ добија се решење $y = \dfrac{1}{2}$.

Дакле, реална решења система из задатка су $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ (Тангента 42, стр. 47, Пријемни испити, задатак 13).

5. Видети решење другог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Из $a \cdot 2^x + b = b \cdot 2^{-x} + a$ добија се $a \cdot 2^{2x} + (b - a) \cdot 2^x - b$, одакле је $2^x = 1$ или $2^x = -\dfrac{b}{a}$. Дакле, графици f и g имају тачно две заједничке тачке ако и само ако је $ab < 0$ и $a \neq -b$ и тада су то тачке $(0, a + b)$ и $\left(\log_2\left(-\dfrac{b}{a}\right), 0\right)$.

2. Ако је n непаран (тј. $n = 2k + 1$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$), тада је

$$5^{2k+1} + 12^{2k+1} \equiv 2 \cdot 2^{2k} \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod 5$$

и не може бити потпун квадрат, јер квадрати при дељењу са 5 могу давати остатке 0,1 или 4.

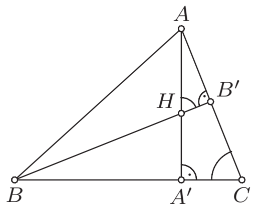
Ако је n паран (тј. $n = 2k$ за неко $k \in \mathbb{N}$) и $x^2 = 5^n + 12^n$ за неко $x \in \mathbb{N}$, тада је $5^{2k} = x^2 - 12^{2k} = (x - 12^k)(x + 12^k)$. Ако $5 \mid x - 12^k$ и $5 \mid x + 12^k$, тада $5 \mid 2 \cdot 12^k = (x + 12^k) - (x - 12^k)$, што је немогуће, па је $x - 12^k = 1$ и $x + 12^k = 5^{2k}$, одакле је $2 \cdot 12^k = 5^{2k} - 1 = 25^k - 1 > 24^k = 2^k \cdot 12^k$. За $k \geqslant 2$ следи $2 \cdot 12^k > 2^k \cdot 12^k > 2 \cdot 12^k$, што је контрадикција. Провером, за $k = 1$ се добија решење, тј. $n = 2$ је једини природни број који задовољава услове задатка ($5^2 + 12^2 = 13^2$) (Тангента 45, стр. 17, Наградни задаци, М570, решење у Тангенти 46, стр. 23).

3. Ако би сва решења једначине из задатка ($x_1, x_2, \ldots, x_n$–има их n јер полином n-тог степена има n комплексних нула) били реални бројеви, тада би на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине било $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}$, одакле је $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n) \geqslant n \cdot \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}$, односно $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \geqslant n \cdot \sqrt[n]{a_0^2}$, што је у супротности са условом задатка.

4. Нека су A' и B' подножја нормала $\triangle ABC$ из тачака A и B, редом, а α, β, γ одговарајући углови троугла. Како је $\triangle AB'H \sim \triangle ACA'$, следи $\dfrac{AH}{AB'} = \dfrac{AC}{AA'}$, а како је $AA' = b \sin\gamma$ (из $\triangle ACA'$), $AB' = c \cos\alpha$ (из $\triangle ABB'$) и $c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (синусна теорема), следи $AH = \dfrac{bc\cos\alpha}{b\sin\gamma} = a \operatorname{ctg}\alpha$. Аналогно је $BH = b \operatorname{ctg}\beta$ и $CH = b \operatorname{ctg}\gamma$, па треба доказати да је

$$\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}. \qquad (\dagger)$$

Како је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ (видети $(*)$ у четвртом задатку за други разред А категорије), на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$, односно $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\geqslant 3\sqrt{3}$, одакле непосредно следи (†). Једнакост важи ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М589, решење у Тангенти 47, стр. 19).



ОП 08 4А 4

5. Нека је A скуп распореда шест томова енциклопедије, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу и 2. том се налази поред 3. тома, а B скуп распореда шест томова енциклопедије, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу, 2. том се налази поред 3. тома и 5. том се налази поред 6. тома.

С обзиром да 2. и 3. том морају бити један поред другог они се могу замислити као један том, водећи рачуна да се тако преполовљава број распореда. Према томе, елементи скупа A се могу видети као распореди пет томова, с тим да 1. том може бити на једној од три некрајње позиције (остали немају ограничења) и унутар тома који је настао спајањем 2. и 3. тома треба одредити њихов распоред, па је $|A|=2\cdot 3\cdot 4!=144$.

Аналогно, приликом одређивања $|B|$ се 5. и 6. том могу видети као један, па је $|B|=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!=48$.

Коначно, укупан број распореда који задовољавају тражене услове је $A-B=144-48=96$.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & -3\\ a & -1 & 1\end{vmatrix} = a-3a-1-3-1-a^2=-(a^2+2a+5),\\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & a & -3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 0+0-1-0-0-1=-2,\\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ a & 0 & 1\end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-a=1-a,\\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & a & 1\\ a & -1 & 0\end{vmatrix} = 0+a+0+1-0-0=1+a,
\end{aligned}$$

за свако $a\in\mathbb{R}$ важи $\Delta\neq 0$, па систем има једно решење

$$(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)=\left(\frac{2}{a^2+2a+5},\frac{a-1}{a^2+2a+5},-\frac{a+1}{a^2+2a+5}\right)$$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 4).

2. Како је површина паралелограма над векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ једнака $|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}\times\vec{x}=0$, $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$ и како је (по условима задатка) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$, следи да је тражена површина једнака

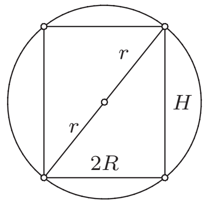
$$\begin{aligned}
|\vec{p}\times\vec{q}| &= \left|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})\right| = \left|2a\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{a}-8\vec{a}\times\vec{b}-12\vec{b}\times\vec{b}\right| = \left|11\vec{b}\times\vec{a}\right|\\
&= 11\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=11\cdot\sin\frac{\pi}{2}=11.
\end{aligned}$$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 2).

3. Видети решење трећег задатка за трећи разред Б категорије.

4. Раван која садржи осу ваљка из услова задатка сече лопту по кружници полупречника r, а ваљак по правоугаонику уписаном у ову кружницу. Ако су R и H полупречник основе и висина овог ваљка, редом, тада су странице тог правоугаоника $2R$ и H, а дијагонала $2r$, па је (Питагорина теорема) $H^2 = 4(r^2 - R^2)$ $(0 < R < r)$.

Следи да је површина омотача ваљка $M(R) = 2RH\pi = 4\pi \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - R^2}$, па како је



ОП 08 4Б 4

$$M'(R) = 4\pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - R^2} + R \cdot \frac{-2R}{2\sqrt{r^2 - R^2}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{r^2 - R^2}} \cdot (r^2 - 2R^2)$$

следи да је $M'(R) > 0$ за $R \in \left(0, \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ и $M'(R) < 0$ за $R \in \left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}, r\right)$, тј. $M(R)$ је максимално за $R = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ и тада је $H = r\sqrt{2}$, а запремина тог ваљка $V = R^2 H\pi = \dfrac{r^3\pi \cdot \sqrt{2}}{2}$ (Тангента 50, стр. 33, Писмени задаци, задатак 3).

Напомена. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи $R \cdot \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{R^2 \cdot (r^2 - R^2)} \leqslant \dfrac{R^2 + (r^2 - R^2)}{2}$ и притом једнакост важи за $R^2 = r^2 - R^2$, тј. $R = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, тј. у претходном се могло избећи коришћење извода.

5. Видети решење првог задатка за четврти разред А категорије.