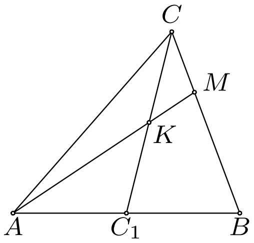
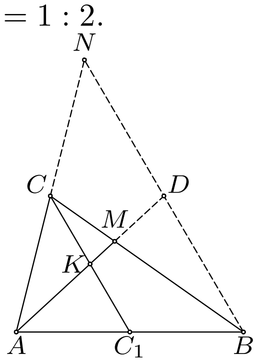
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. <u>*Решење 1*</u>: Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 1$, тј. $\lambda = \frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM : MB = 1 : 2$.





<u>*Решење 2*</u>: Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN \parallel CC_1$ и нека је $AM \cap BN = \{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1} = \dfrac{ND}{DB}$, па је $ND = BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CN}$, па је $AC = CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM : MB = 1 : 2$.

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq + qr + rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq + qr + rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p + 2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r, p) = 1 \;\Rightarrow\; (r, p+2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r > 1$, то из $p = l(p+2r)$ добијамо $p+2r = p$, што је немогуће.
Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p, q, r, n) = (3, 3, 3, 1)$.

3. Једначина има тривијално решење $x = y = z = 0$. Покажимо да нема других решења. Претпоставимо супротно да има неко решење $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Без умањења општости можемо узети да је $x_0 \neq 0$ и нека је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0. Израз на десној страни је дељив са 4. Како тачан квадрат даје остатке 0 и 1 при дељењу са 4 добијамо да сва три броја, x_0, y_0, z_0, морају бити парни: $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$ и $z_0 = 2z_1$. Уколико ово уврстимо у полазну једнакост добијамо $4({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2) = 2004\cdot 8x_1y_1z_1$, односно ${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2 = 4008x_1y_1z_1$. Сада аналогним поступком добијамо и да су сви бројеви x_1, y_1, z_1 парни. Понављајући овај поступак $k+1$ пута добијамо да је број x_0 дељив са 2^{k+1}, што је у контрадикцији са претпоставком да је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0, чиме смо показали да једначина има само тривијално решење.

4. **а)** $|S| = 4$. Свака 2 елемента из $S \times S$ могу бити у релацији ρ или не бити у релацији. Стога је укупан број релација једнак: $2^{|S\times S|} = 2^{4\cdot 4} = 2^{16} = 65536$.

Код симетричних релација када одредимо да ли су у релацији елементи са главне дијагонале и изнад ње у таблици потпуно је одређено да ли су у релацији и елементи испод главне дијагонале. Стога је укупан број симетричних релација једнак $2^{4+3+2+1} = 2^{10} = 1024$, а укупан број несиметричних релација добијамо када претходни број одузмемо од укупног броја релација: $2^{16} - 2^{10} = 65536 - 1024 = 64512$.

б) За елементе са главне дијагонале имамо 2 могућности (или су у релацији или нису, тј. $a\,\rho\,a$ или $a \not\rho\, a$), а за сваки пар симетричних места у односу на главну дијагоналу, (a, b) и (b, a), имамо 3 могућности (или је $a\,\rho\,b$ и $b \not\rho\, a$, или је $b\,\rho\,a$ и $a \not\rho\, b$, или је $a \not\rho\, b$ и $b \not\rho\, a$). Стога је укупан број антисиметричних релација једнак $2^4 \cdot 3^{3+2+1} = 16 \cdot 729 = 11664$

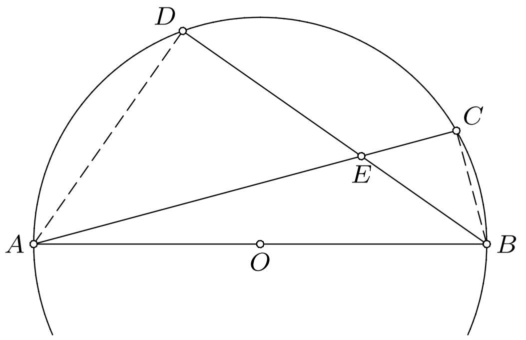
5. Оповргнућемо тврђење. Контрапример је шесторка $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $3\cdot 5$, $7\cdot 11$, $7\cdot 13$, $11\cdot 13$, која не задовољава ниједан услов задатка.

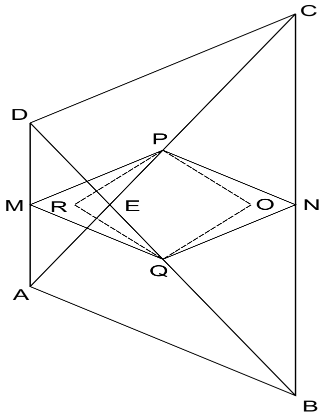
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

1. Користимо да су троуглови $\triangle BCA$ и $\triangle ADB$ правоугли, као и потенцију тачке E у односу на круг k: $AE \cdot ED = BE \cdot EC$. Стога имамо да је $AE \cdot AD = AE^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + BE \cdot EC = AC^2 + EC(EC + BE) = AC^2 + EC \cdot BC = AC^2 + (BC - BE) \cdot BC = AC^2 + BC^2 - BE \cdot BC$, па је $AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2$.





2. Довољно је показати – Ако је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$, онда је $AB = CD$. Нека је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$.
Ако је $O \equiv E$, тада је $ABCD$ правоугаоник, па важи $AB = CD$.
Претпоставимо да је $O \not\equiv E$. Нека су M, N, P, Q средишта дужи AD, BC, AC, BD, редом, и нека је R пресек нормала из тачака P и Q редом на BD и AC.
Четвороуглови $MPNQ$ и $OPRQ$ су паралелограми, па се дужи MN, OR и PQ секу у једној тачки која их и полови. Пошто средиште дужи OE лежи на MN имамо да је $RE \parallel MN$. С друге стране, R је ортоцентар $\triangle PQE$, па је $RE \perp PQ$. Дакле, $MN \perp PQ$, тј. $MPNQ$ је ромб. Сада је лако показати да је $AB = 2PN = 2NQ = CD$.

3. Еквивалентним трансформацијама долазимо до: $a^2 + 2b^2 - 11 = (14 - 2ab)\sqrt{2}$. Сада имамо два случаја: ако је $2ab \neq 14$, добијамо да је $\sqrt{2} = \dfrac{a^2 + 2b^2 - 11}{(14 - 2ab)}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а израз са десне стране рационалан. Друга могућност је да важи $2ab = 14$. Тада важи и $a^2 + 2b^2 = 11$, па је $(a - 2b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2} = 11 - 14\sqrt{2} < 0$. Ово је контрадикција, па задатак нема решења.

4. _Решење 1_: За $m=0$ полазна једначина је линеарна једначина $x-3=0$ и она има само позитивно решење ($x=3$).
За $m\neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D=16m+1\geqslant 0$, што даје услов $m\geqslant \frac{-1}{16}$.
Оба решења су негативна, уколико важи $D\geqslant 0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1\cdot x_2>0$: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2m+1}{m}<0$ за $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m}>0$ за $m\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$, те пресек услова $m\geqslant\frac{-1}{16}$ са ова два услова даје $m\in(3,+\infty)$.
Ако је тачно једно решење негативно онда је друго позитивно или 0. Једно решење је негативно, а друго позитивно, уколико важи $D\geqslant 0$ и $x_1\cdot x_2<0$: $x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m}<0$ за $m\in(0,3)$ и пресек услова $m\geqslant\frac{-1}{16}$ са овим условом даје $m\in(0,3)$. Једно решење је негативно, а друго 0, уколико важи: $D\geqslant 0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1\cdot x_2=0$: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2m+1}{m}<0$ за $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m}=0$, тј. за $m=3$ (то је решење јер је $3\geqslant\frac{-1}{16}$ и $3\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$). Значи, једначина има тачно једно негативно решење за $m\in(0,3]$.
Једначина има бар једно негативно решење за $m\in(0,+\infty)$, а два за $m\in(3,+\infty)$.

Решење 2: За $m=0$ полазна једначина је линеарна једначина $x-3=0$ и она има само позитивно решење ($x=3$).
За $m\neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D=16m+1\geqslant 0$, што даје услов $m\geqslant\frac{-1}{16}$. Њена решења су дата формулом

$$x_{1,2}=\frac{-(2m+1)\pm\sqrt{16m+1}}{2m}.$$

Испитајмо када је $|2m+1|<\sqrt{16m+1}$. Квадрирамо и добијамо неједначину $m^2-3m<0$, што је испуњено за $m\in(0,3)$. Онда је $|2m+1|>\sqrt{16m+1}$ за $m\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.
Ако је $m\in[\frac{-1}{16},0)$ онда су и именилац ($2m<0$) и бројилац ($-(2m+1)-\sqrt{16m+1}<0$) за оба решења негативни, па су оба решења позитивна.
Ако је $m\in(0,3]$ онда је именилац позитиван ($2m>0$), док је бројилац једном позитиван ($-(2m+1)+\sqrt{16m+1}>0$), а једном негативан ($-(2m+1)-\sqrt{16m+1}<0$), па је једно решење позитивно, а друго је негативно.
Ако је $m\in(3,+\infty)$ онда је именилац позитиван ($2m>0$), док су бројиоци за оба решења негативни ($-(2m+1)\pm\sqrt{16m+1}<0$), па су оба решења негативна.
Једначина има бар једно негативно решење за $m\in(0,+\infty)$, а два за $m\in(3,+\infty)$.

5. **а)** Може. Није тешко конструисати пример. Означимо бројевима 1-7 чланове. Укупно има $\binom{7}{2} = 21$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду триту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са 5 губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 11 ручкова. То можемо нпр. ако на почетку иду $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}$, а осталих 8 ручкова су сви са по два члана, који још парови фале:
$\{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$.

Напомена: Може на још један начин са 1×4, 3×3 и 6×2.

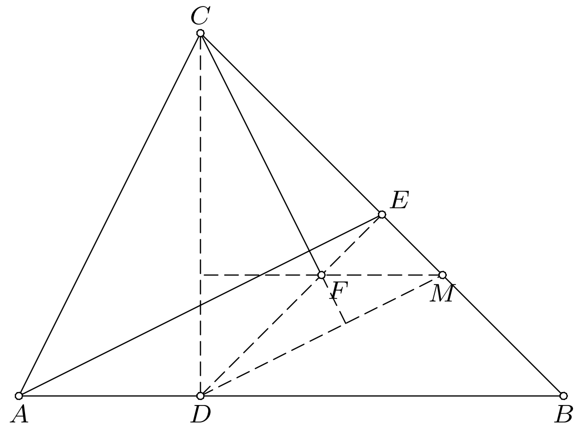
б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{11}{2} = 55$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $5 \cdot 10 < 55$, јасно је да од тих 5 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 5 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође немогуће је да су преосталих 4 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{10}{2} + 4 < 55$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5 \cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Нека је M тачка странице BC таква да је $DM \parallel AE$. Тада је $EM : MB = AD : DB = EF : FD$, па је $MF \parallel AB$, а онда и $MF \perp CD$. Како је и $DE \perp BC$, добијамо да је тачка F ортоцентар троугла $\triangle CDM$, па је $CF \perp DM$, а тиме и $CF \perp AE$.



2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3. Нека су a и b редом остаци при дељењу $100n$ са 199 и 201. Задата једначина постаје $\frac{100n-a}{199} + \frac{100n-b}{201} = a$, што се након свођења на заједнички именилац своди на $n = 201a + 199b$.

С друге стране, за све $a = 0, 1, \ldots, 198$ и $b = 0, 1, \ldots, 200$, $n = 201a + 199b$ је решење једначине. Заиста, остаци при дељењу $100n = 20100a + 19900b$ са 199 и 201 су редом a и b, па сад лако проверавамо да је $\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n$. Како се за различите вредности бројева a и b добијају различите вредности за n, решења има онолико колико има парова (a, b), а ових има тачно $199 \cdot 201 = 39999$.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$|a| = |-a| = |z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3| = 3,$$
$$|b| = |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$$
$$= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3| = |a|,$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a|=|b|$ и $|c|=1$, добијамо да је $w_1=-1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3+|a|x^2+|a|x+1 = (x+1)(x^2+(|a|-1)x+1) = 0,$$

па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2+(|a|-1)x+1=0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2w_3=1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0 \leqslant |a| \leqslant 3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D=(|a|+1)(|a|-3) \leqslant 0$. Ако је $|a|=3$ тада је $w_2=w_3=-1$, односно $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. За $0 \leqslant |a| < 3$ је $D<0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3 = \overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2 = w_2\overline{w_2} = w_2w_3 = 1$, као и $|w_3|^2 = w_3\overline{w_3} = w_3w_2 = 1$.
Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$.

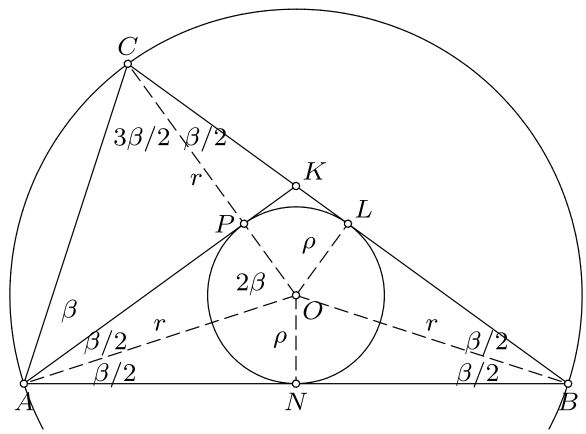
5. **а)** Може. Није тешко конструисати пример.Означимо бројевима 1-8 чланове. Укупно има $\binom{8}{2} = 28$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три члана ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са пет чланова губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 13 ручкова. То можемо нпр ако иду $\{1,2,3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{1,6,8\}$, а осталих 12 ручкова сви по 2 члана који још парови фале.
б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{13}{2} = 78$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $7 \cdot 10 < 78$, јасно је да од тих 7 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 7 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође, немогуће је да су преосталих 6 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{12}{2} + 6 < 78$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничог члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5 \cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

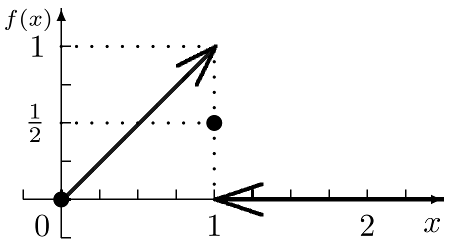
Четврти разред – А категорија

1. Означимо са O тачку која је истовремено и центар уписаног круга у $\triangle ABK$ (полупречника ρ) и центар описаног круга око $\triangle ABC$ (полупречника r). Нека су N, L и P, респективно, тачке у којима уписани круг у $\triangle ABK$ додирује странице AB, BK и KA. Тада су подударни правоугли троуглови $\triangle APO \cong \triangle ANO \cong \triangle BNO \cong \triangle BLO$ (хипотенузе су им једнаке R, катете r и угао наспрам веће странице је $90°$). Одатле имамо да је $\sphericalangle BCO = \sphericalangle KAO = \sphericalangle BAO = \frac{\beta}{2}$. Како је AK симетрала угла добијамо да је $\sphericalangle CAK = \sphericalangle KAb = \beta$. Угао $\sphericalangle AOC$ је централни за угао $\sphericalangle ABC = \beta$ па је $\sphericalangle AOC = 2\beta$. Из троугла $\triangle AOC$ налазимо да је $\sphericalangle ACO = 180° - \frac{7}{2}\beta$, али како је тај троугао једнакокрак ($AO = CO = R$) добијамо да је $\beta = 36°$. Одатле директно добијамо да су углови у троуглу $\triangle ABC$ једнаки $\sphericalangle ABC = 36°$, $\sphericalangle BCA = 72°$ и $\sphericalangle CAB = 72°$.



2. Означимо са $(*)$ услов задатка $f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y)$ за $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Како је $f(x)$ "на", онда за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји неко $a \in \mathbb{R}$ такво да је $x = f(a)$. Сада из $(*)$ имамо $f(x) = f\big(f(a-0)\big) = f(a) - f(0) = x - f(0)$. Ако у $(*)$ заменимо $y = x$ добијамо да је $f(0) = 0$, па је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$.
Лако се проверава да ова функција задовољава једначину $(*)$.

3. $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$



Нуле функције су $x = 0$ и сви бројеви $x > 1$. $f(x) > 0$ за $0 < x \leqslant 1$, а $f(x) < 0$ није никад. Функција $f(x)$ је растућа за $0 \leqslant x < 1$, у $x = 1$ има тачку прекида, а за $x > 1$ је константна.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$|a| = |-a| = |z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3| = 3,$$

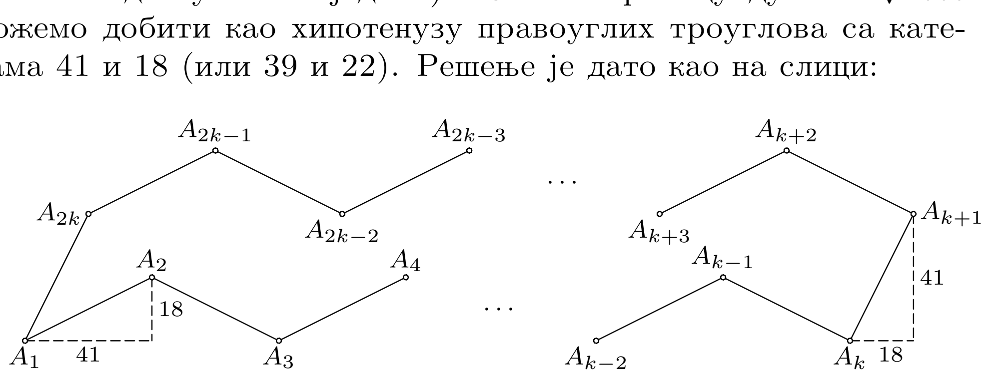
$$\begin{aligned} |b| &= |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = |z_1z_2z_3||\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}| \\ &= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3| = |a|, \end{aligned}$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a|=|b|$ и $|c|=1$, добијамо да је $w_1=-1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3+|a|x^2+|a|x+1 = (x+1)(x^2+(|a|-1)x+1) = 0,$$

па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2+(|a|-1)x+1=0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2w_3=1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0\leqslant|a|\leqslant3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D=(|a|+1)(|a|-3)\leqslant0$. Ако је $|a|=3$ тада је $w_2=w_3=-1$, односно $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. За $0\leqslant|a|<3$ је $D<0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3=\overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2=w_2\overline{w_2}=w_2w_3=1$, као и $|w_3|^2=w_3\overline{w_3}=w_3w_2=1$.
Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$.

5. Кад се померимо из једног темена у суседно промени се парност збира координата. Стога, ако је n непаран број, када кренемо из једног темена и обиђемо остала и вратимо се у полазно, парност збира координата би била промењена што није могуће, те за n непарно не постоји такав n-тоугао.
За n парно, 2005 треба да представимо као збир два квадрата. Како је $2004 = 5\cdot401 = (2^2+1)\cdot(20^2+1)$, коришћењем формуле $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(ax-by)^2+(ay+bx)^2$ добијамо представљања $2005=41^2+18^2=39^2+22^2$ (може се показати да су она и једина). Стога страницу дужине $\sqrt{2005}$ можемо добити као хипотенузу правоуглих троуглова са катетама 41 и 18 (или 39 и 22). Решење је дато као на слици:

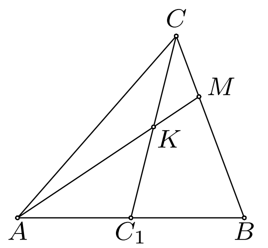


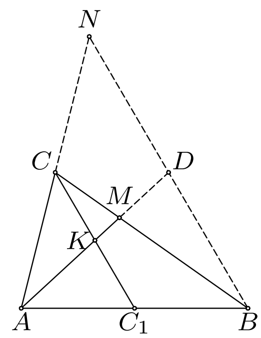
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. <u>*Решење 1*:</u> Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 1$, тј. $\lambda = \frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM : MB = 1 : 2$.





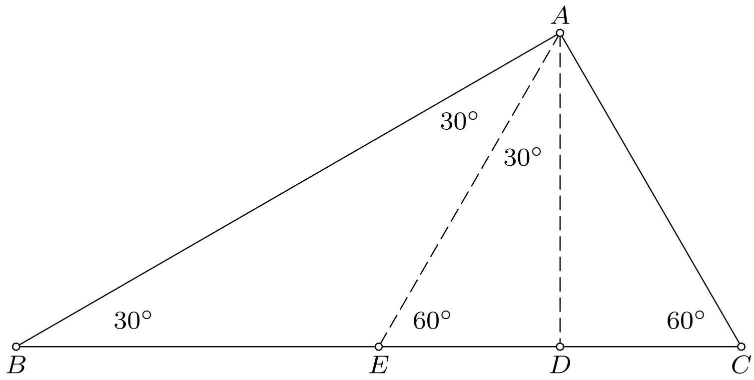
<u>*Решење 2*:</u> Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN \parallel CC_1$ и нека је $AM \cap BN = \{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1} = \dfrac{ND}{DB}$, па је $ND = BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CN}$, па је $AC = CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM : MB = 1 : 2$.

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq + qr + rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq + qr + rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p + 2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r, p) = 1 \Rightarrow (r, p+2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r > 1$, то из $p = l(p+2r)$ добијамо $p+2r = p$, што је немогуће. Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p, q, r, n) = (3, 3, 3, 1)$.

3. Важи: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1 = 3 \cdot (2 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$. Како се број $3c$ завршава јединицом, то је $c = 7$, те добијамо $1000a + 100b + 71 = 6000 + 300a + (3b + 2) \cdot 10 + 1$. Како је b цифра ($0 \leqslant b \leqslant 9$), биће $2 \leqslant 3b + 2 \leqslant 29$. Број $3b + 2$ се завршава цифром 7, па је $3b + 2 \in \{7, 17, 27\}$. Могуће је само $b = 5$. Сада је $1000a + 571 = 6000 + (3b + 1) \cdot 100 + 71$. Како је и a цифра, биће $1 \leqslant 3a + 1 \leqslant 28$ и $3a + 1$ се завршава цифром 5, те је $3a + 1 = 25$, тј. $a = 8$.
Тражени број је 857.

4. Свако од темена не може бити спојено са самим собом и са суседних 6 темена (по 3 са сваке стране). Дакле, свако од 15 темена може бити спојено са преосталих 8 темена, а како на овај начин сваку дијагоналу бројимо 2 пута (код сваког од темена по једном) добијамо да је тражени број дијагонала једнак $\dfrac{15 \cdot 8}{2} = 60$.

5. Нека је AE симетрала угла $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \sphericalangle ABC = 60^\circ$. Тада је $\triangle AEB$ једнакокраки троугао ($\sphericalangle BAE = 30^\circ = \sphericalangle ABE$) и $AE = BE$. Како је и $\triangle AED$ половина једнакостраничног троугла имамо да је $ED = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{BE}{2}$, односно $BD = \dfrac{3}{4}BC$, те је $CD = DE = \dfrac{1}{4}BC$. Сада из подударности $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ добијамо $AC = AE$, а како је $AE = BE = \dfrac{1}{2}BC = EC$, налазимо да је троугао $\triangle AEC$ једнакостраничан. Према томе, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Како је $9+4\sqrt{5} = 4+4\sqrt{5}+5 = (2+\sqrt{5})^2$, имамо да је
$A = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = -2.$

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq+qr+rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq+qr+rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p+2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r,p) = 1 \ \Rightarrow\ (r, p+2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r > 1$, то из $p = l(p+2r)$ добијамо $p+2r = p$, што је немогуће.
Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p,q,r,n) = (3,3,3,1)$.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x = 3y \pm 2\sqrt{25-y^2}$, па је $|y| \leqslant 5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$. Решења су:
$(x,y) \in \{(10,0), (-10,0), (-1,-3), (-17,-3), (1,3), (17,3), (-6,-4),$
$(-18,-4), (6,4), (18,4), (-15,-5), (15,5)\}.$

4. <u>*Решење 1*:</u> За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x-3 = 0$ и она има само позитивно решење $(x = 3)$.
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m+1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$.
Оба решења су негативна, уколико важи $D \geqslant 0$, $x_1+x_2 < 0$ и $x_1\cdot x_2 > 0$: $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1\cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} > 0$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, те пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са ова два услова даје $m \in (3, +\infty)$.
Ако је тачно једно решење негативно онда је друго позитивно или 0. Једно решење је негативно, а друго позитивно, уколико важи $D \geqslant 0$ и $x_1\cdot x_2 < 0$: $x_1\cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} < 0$ за $m \in (0,3)$ и пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са овим условом даје $m \in (0,3)$. Једно

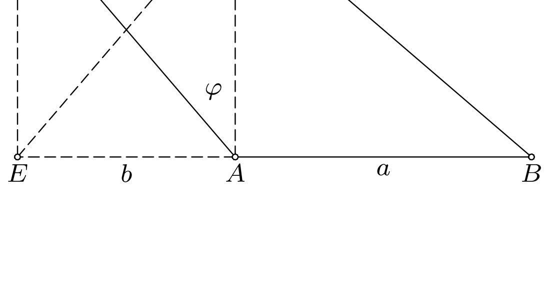
решење је негативно, а друго 0, уколико важи: $D \geqslant 0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1 \cdot x_2 = 0$: $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} = 0$, тј. за $m=3$ (то је решење јер је $3 \geqslant \frac{-1}{16}$ и $3 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0,+\infty)$). Значи, једначина има тачно једно негативно решење за $m \in (0,3]$.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0,+\infty)$, а два за $m \in (3,+\infty)$.

<u>*Решење 2:*</u> За $m=0$ полазна једначина је линеарна једначина $x-3=0$ и она има само позитивно решење ($x=3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m+1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$. Њена решења су дата формулом

$$x_{1,2} = \frac{-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1}}{2m}.$$

Испитајмо када је $|2m+1| < \sqrt{16m+1}$. Квадрирамо и добијамо неједначину $m^2-3m<0$, што је испуњено за $m \in (0,3)$. Онда је $|2m+1| > \sqrt{16m+1}$ за $m \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$.
Ако је $m \in [\frac{-1}{16}, 0)$ онда су и именилац ($2m<0$) и бројилац ($-(2m+1) - \sqrt{16m+1} < 0$) за оба решења негативни, па су оба решења позитивна.
Ако је $m \in (0,3]$ онда је именилац позитиван ($2m>0$), док је бројилац једном позитиван ($-(2m+1)+\sqrt{16m+1}>0$), а једном негативан ($-(2m+1)-\sqrt{16m+1}<0$), па је једно решење позитивно, а друго је негативно.
Ако је $m \in (3,+\infty)$ онда је именилац позитиван ($2m>0$), док су бројиоци за оба решења негативни ($-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1} < 0$), па су оба решења негативна.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0,+\infty)$, а два за $m \in (3,+\infty)$.

5. Нека је E подножје нормале из D на праву AB. Тада је $EACD$ правоугаоник, стога и због услова задатка је $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB = \varphi + \theta = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$. У правоуглом троуглу $\triangle CEB$ је $EC^2 = EB \cdot EA = (a+b)\cdot b$ и $CB^2 = EB \cdot AB = (a+b)\cdot a$, па је $AD = EC = \sqrt{b(a+b)}$ и $BC = \sqrt{a(a+b)}$.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

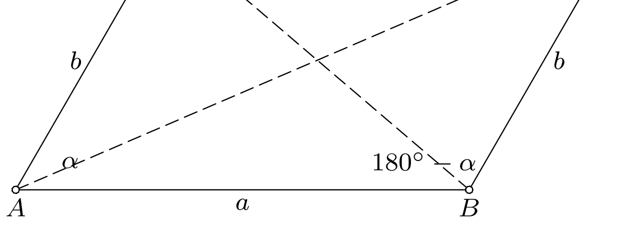
Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $\operatorname{tg}\alpha = a$. Тада је $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) = \dfrac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+120^\circ) = \dfrac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}$. Сада имамо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a^2+a\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}} + \dfrac{a^2-3}{1-3a^2} + \dfrac{a^2-a\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}} = \dfrac{9a^2-3}{1-3a^2} = -3$.

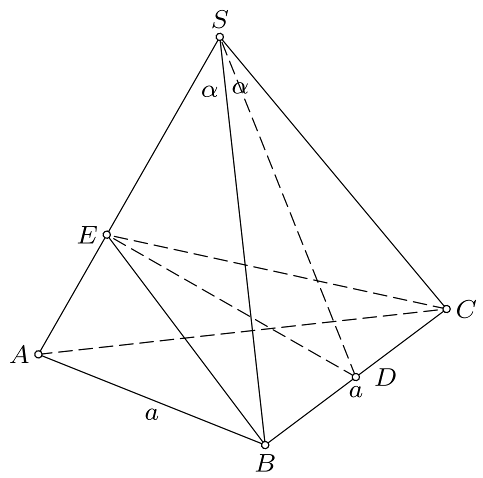
2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2\sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x = -4y \pm 3\sqrt{25-y^2}$, па је $|y| \leqslant 5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$. Решења су:
$(x,y) \in \{(15,0), (-15,0), (24,-3), (0,-3), (-24,3), (0,3), (25,-4),$
$(17,-4), (-25,4), (-17,4), (20,-5), (-20,5)\}$.

4. Означимо $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $BD = d_1 = \sqrt{7}\cdot k$, $AC = d_2 = \sqrt{19}\cdot k$, $\sphericalangle BAD = \alpha$ (за који треба да видимо да ли је 60° или 120°), $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$. Применимо косинусну теорему на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$: ${d_1}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, ${d_2}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$, па како је $d_1 < d_2$ добијамо да је $\alpha = 60^\circ$. Дакле, ${d_1}^2 = a^2 + b^2 - ab$, ${d_2}^2 = a^2 + b^2 + ab$, па је $\dfrac{{d_2}^2}{{d_1}^2} = \dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab} = \dfrac{19}{7}$, тј. $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 + \frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right) + 1 - \frac{a}{b}} = \dfrac{19}{7}$, одакле налазимо квадратну једначину $\frac{12}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{26}{7}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{12}{7} = 0$. Кад је решимо добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ или $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.



5. Означимо са A, B, C темена основе и са S врх пирамиде. Нека је D средиште ивице BC ($BD = \frac{1}{2}a$) и нека је E пресек равни која садржи BC и нормална је на AS. Тада је $BE \perp AS$, па из правоуглог троугла $\triangle BES$ имамо $BE = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Висину DE добијамо из Питагорине теореме за $\triangle BDE$: $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$. Стога је $P_{\triangle BCE} = \dfrac{BC \cdot DE}{2} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

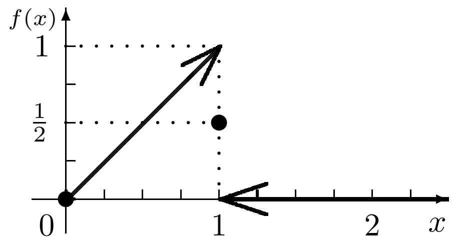
Четврти разред – Б категорија

1. Нека су то бројеви a, b, c. Тада је $2b = a + c$ и $b^4 = a^2c^2$. Ако квадрирамо прву једначину и искористимо да је $b^2 = |ac|$, добијамо $a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|$.
Ако је $ac > 0$ добијамо $a^2 - 2ac + c^2 = 0$, па је $a = c$ и $a^2 = c^2$, дакле $q_1 = 1$.
Ако је $ac < 0$ добијамо једнакост $a^2 + 6ac + c^2 = 0$, одакле је $\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}$. Како је $\frac{c^2}{a^2} = q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ и $q > 0$ (јер су квадрати), биће $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}$.
Количник тог низа може бити $q_1 = 1$, $q_2 = 3 + \sqrt{8}$ или $q_3 = 3 - \sqrt{8}$.

2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2 + t - 12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$



Нуле функције су $x = 0$ и сви бројеви $x > 1$. $f(x) > 0$ за $0 < x \leqslant 1$, а $f(x) < 0$ није никад. Функција $f(x)$ је растућа за $0 \leqslant x < 1$, у $x = 1$ има тачку прекида, а за $x > 1$ је константна.

4. Тражена гран. вредност је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4}$.

5. Из $\frac{1}{7}\arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ следи $\arccos x = (\frac{7}{2} + 14k)\pi$. Та релација није испуњена ни за једно $k \in \mathbb{Z}$ будући да важи $(\frac{7}{2} - 14)\pi < 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi < \frac{7}{2}\pi$.