РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Први разред, А категорија

1. Претпоставимо да овакви бројеви постоје. Како је $2010 = 30 \cdot 67$, а 67 прост, барем један од бројева $a+b$, $b+c$ и $c+a$ мора бити дељив са 67. Без умањења општости можемо претпоставити да је $b+c$ дељиво са 67, а самим тим и $b+c \geqslant 67$ (b и c су природни бројеви). Даље, $(a+b)(c+a)$ дели 30, па је $a+b \leqslant 30$ и $c+a \leqslant 30$. Међутим, тада је

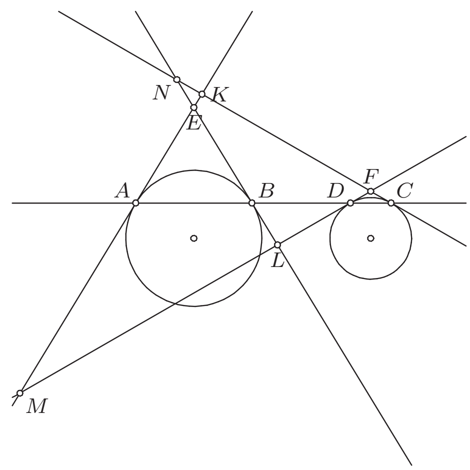
$$67 \leqslant b+c < a+b+c+a \leqslant 60$$

што је контрадикција, па овакви бројеви не постоје.

2. Нека су t_a и t_b тангенте на кружницу k_1 у тачкама A и B, редом, а t_c и t_d тангенте на кружницу k_2 у тачкама C и D, редом, и нека је $t_a \cap t_c = \{K\}$, $t_b \cap t_d = \{L\}$, $t_a \cap t_d = \{M\}$, $t_b \cap t_c = \{N\}$, $t_a \cap t_b = \{E\}$ и $t_c \cap t_d = \{F\}$. Приметимо да је

$$\begin{aligned} \sphericalangle NKM &= \sphericalangle KCD + \sphericalangle KAB, \\ \sphericalangle NLM &= \sphericalangle DBL + \sphericalangle BDL. \end{aligned}$$

Сада, како је $\sphericalangle DBL = \sphericalangle ABE = \sphericalangle KAB$ (троугао AEB је једнакокраки) и $\sphericalangle BDL = \sphericalangle FDC = \sphericalangle KCD$ (троугао DFC је једнакокраки), то је $\sphericalangle MKN = \sphericalangle NLM$. Из последњег закључујемо да су тачке K, L, M и N концикличне, што је и требало доказати.



ОК 2011 1А 2

3. Приметимо да је $2 < \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+3}} < \sqrt{6+3} < 3$.
Разматримо зато следећа два случаја:
1° $n \leqslant 2$. Из претходног закључујемо да је дати израз једнак $3-n \in \mathbb{Z}$, па су $n=1$ и $n=2$ решења задатка.
2° $n \geqslant 3$. У овом случају израз је једнак $n+3-2\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, што је цео број ако и само ако је $2\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ цео број. Докажимо да ово не важи, тачније да је $\alpha = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ ирационалан број. Претпоставимо супротно, тј. да је $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тада је $\alpha^2 = 6+\sqrt{6+\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}$, па је $\beta = \sqrt{6+\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}$. Даље, $\beta^2 = 6+\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, па је $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, што није тачно.
Дакле, једина решења су $n=1$ и $n=2$. (Тангента 62, стр. 38, Писмени задаци)

4. Нека је $CM \cap BN = \{S\}$. Тада је

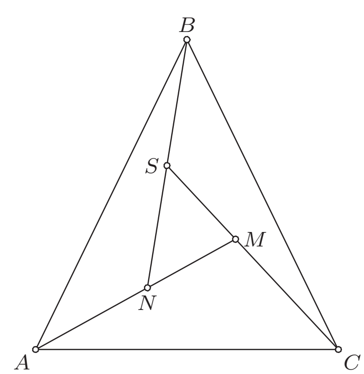
$$\sphericalangle MSN = \sphericalangle AMC - \sphericalangle BNM = \sphericalangle ABC,$$

и према томе $MN = MS$. Осим тога важи

$$\begin{aligned} \sphericalangle CBS &= \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABN = \sphericalangle BAN \\ \sphericalangle BCS &= \sphericalangle ABC - \sphericalangle SBC = \sphericalangle ABN, \end{aligned}$$

што заједно са $AB = BC$ даје да су троуглови ABN и BCS подударни. Следи да је

$$BN = CS = CM + MS = CM + MN.$$



ОК 2011 1А 4

5. Транслирамо дату фигуру за вектор дужине 1 паралелан дужој страници правоугаоника. Полазна и добијена фигура имају збир површина већи од 2012, а садржане су у правоугаонику 2012×1 добијеном проширивањем датог. Стога те две фигуре имају бар једну заједничку тачку, рецимо X. Ако је X' тачка која се слика у X поменутом транслацијом, обе те тачке припадају датој фигури и на растојању су тачно 1.

Други разред, А категорија

1. Докажимо да Пера увек може победити.
Пера уписије прво $b = 0$. Даље, могућа су два случаја:

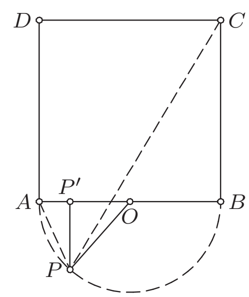
1° Мика уписује ненула број, тј. уписује $c = m \neq 0$ или $a = m \neq 0$. Тада Пера уписује $a = -m$, односно $c = -m$ и тада је $D = b^2 - 4ac \geqslant -4ac > 0$, па квадратна једначина има 2 различита реална решења x_1 и x_2. Из Виетових правила имамо да је $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 < 0$, те су она супротног знака и Пера добија.

2° Мика уписује 0 на неко од преосталих места. Тада Пера уписује 0 на преостало место чиме се добили једначину $0 = 0$, која има бесконачно много решења, од којих је једно нпр. 1, а друго -1, па Пера поново добија.

2. Без губљења општости претпоставимо да је квадрат странице 2. Нека је O средиште странице AB, $\sphericalangle AOP = x$ и P' подножје нормале из P на AB. Тада је из Питагорине теореме

$$\begin{aligned}
AP^2 &= AP'^2 + PP'^2 \\
&= (1-\cos x)^2 + \sin^2 x = 2 - 2\cos x \\
CP^2 &= (PP' + BC)^2 + BP'^2 \\
&= (2+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2 \\
&= 6 + 4\sin x + 2\cos x,
\end{aligned}$$

па је $AP^2 + CP^2 = 8 + 4\sin x$. Последњи израз је максималан када је $x = \dfrac{\pi}{2}$, тј. када је P средиште лука над AB. (Тангента 58, стр. 8, M842)

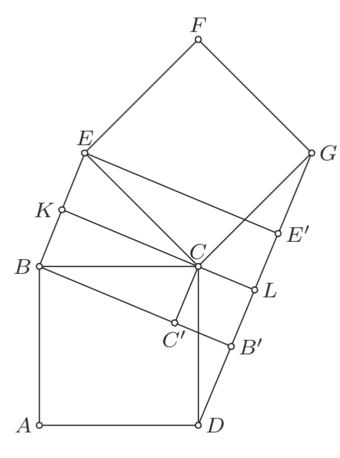


ОК 2011 2А 2

3. Нека су тачке B' и E' подножја нормала из тачака B и E на праву DG, редом. Нека је тачка C' подножје нормале из C на праву BB'. Како је $\sphericalangle BC'C = \sphericalangle DLC = 90^\circ$, $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle LDC$ (углови са нормалним крацима) и $BC = DC$ (странице квадрата $ABCD$), то је

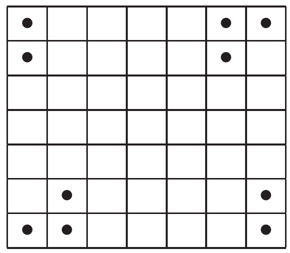
$$\triangle BCC' \cong \triangle DCL,$$

па је $CC' = CL$. Четвороугао $CC'B'L$ је правоугаоник, па је из претходног $B'L = CL$. Аналогно добијамо и да је $E'L = CL$, па је $B'L = E'L$. Самим тим, како су праве CL, BB' и EE' паралелне, а L средиште дужи $B'E'$, то је пресек правих CL и BE тачка K, што је и требало доказати.

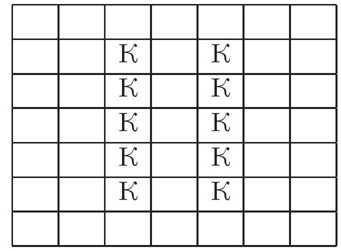


ОК 2011 2А 3

4. Обележимо поља табле паровима из скупа $\{A, B, C, D, E, F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Уочимо десет поља $A1, A6, A7, B1, B2, E6, E7, G1, G2, G7$ (која су означена на слици лево). Сваки коњ на табли може да туче највише једно од ових поља, па на таблу морамо поставити барем 10 коња. 10 коња постављених као на слици десно испуњавају услове задатка, па је тражени број једнак 10.



ОК 2А 4а



ОК 2А 4б

5. Претпоставимо да је $n = 7q = 7p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, где су $p_1, \ldots, p_k$ различити прости бројеви који нису једнаки 7. Тада је збир свих делилаца броја n једнак

$$\sigma(n) = (1+7)(1+p_1+\cdots+p_1^{r_1})\cdot\ldots\cdot(1+p_k+\cdots+p_k^{r_k}),$$

одакле следи да је $\sigma(n) = 2n$ дељиво са 8, тј. $4 \mid n$. Међутим, тада су $\frac{7q}{2}$, $\frac{7q}{4}$, q, $\frac{q}{2}$, $\frac{q}{4}$, 1 различити делиоци броја n који су мањи од n, а чији је збир једнак $7q + 1 = n + 1$. Контрадикција.

Трећи разред, А категорија

1. Да бисмо доказали да је $\triangle BEF$ правоугли довољно је доказати да је $\triangle FAE \sim \triangle EAB$.

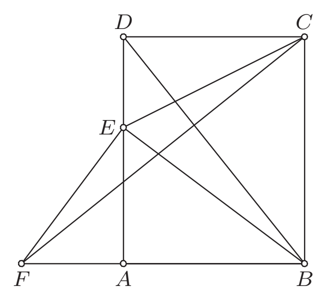
Како је $\sphericalangle FAE = \sphericalangle EAB = 90^\circ$, то је довољно доказати да је $\dfrac{FA}{EA} = \dfrac{EA}{AB}$. Нека је $AB = a$ и $BC = b$. Како је $\triangle CFB \sim \triangle BDA$ (одговарајући углови су једнаки као углови са нормалним крацима), то је

$$\frac{FB}{BC} = \frac{DA}{AB},$$

па је $FB = \dfrac{b^2}{a}$, односно $FA = \dfrac{b^2 - a^2}{a}$. Даље, из Питагорине теореме је

$$AE^2 = BE^2 - AB^2 = b^2 - a^2.$$

Самим тим је $\dfrac{FA}{EA} = \dfrac{EA}{AB}$, што је и требало доказати. (Тангента 60, стр. 6, М875)



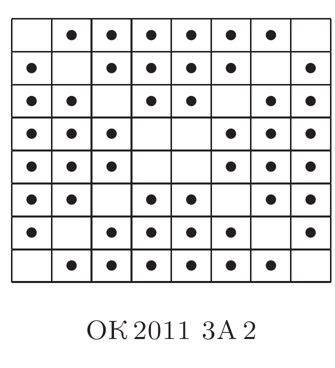
ОК 2011 3А 1

2. Приметимо да на шаховској табли димензија 2012×2012 има $4024 = 2 \cdot 2012$ дијагонала које имају непаран број поља (по 2012 дијагонала паралелних главним дијагоналама - свака друга је непарна) и да оне немају међусобних пресека.

Са сваке од тих дијагонала морамо избацити бар по једно поље да бисмо добили да све дијагонале имају паран број поља. Тиме смо показали да број жетона не може бити већи од

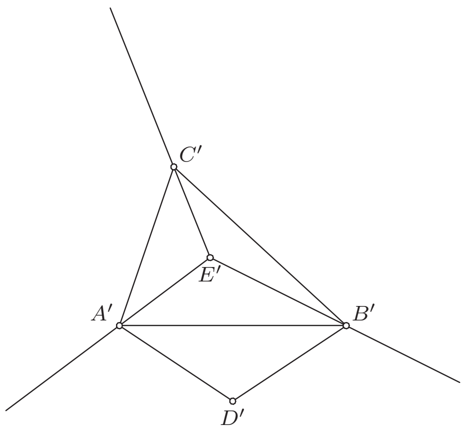
$$2012^2 - 2 \cdot 2012.$$

$2012^2 - 2 \cdot 2012$ жетона можемо поставити на таблу да испуњавају услове задатка тако што ћемо поставити жетон на свако поље сем на поља која су на главним дијагоналама (то је приказано за таблу димензија 8×8 на слици са десне стране).

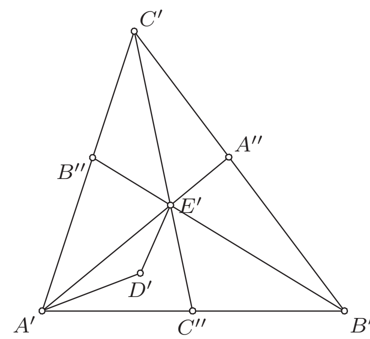


ОК 2011 3А 2

3. Претпоставимо да овакво пресликавање постоји. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао и нека је $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$ и $f(E) = E'$. Четвороугао $A'B'C'E'$ је конкаван, па без умањења општости можемо претпоставити да је E' у унутрашњости троугла $A'B'C'$. Посматрајмо три конвексна дела на које полуправе $E'A'$, $E'B'$ и $E'C'$ (са почетком у E') деле раван P. Претпоставимо да се тачка D' налази у спољашњости троугла $A'B'C'$ и нека се без умањења општости налази у области у којој се не налази C'. Међутим, тада је четвороугао $A'E'B'D'$ конвексан, контрадикција. Дакле, тачка D' се налази у унутрашњости троугла $A'B'C'$. Нека је $A'E' \cap B'C' = \{A''\}$, $B'E' \cap C'A' = \{B''\}$ и $C'E' \cap A'B' = \{C''\}$. Тачка D' се налази у једном од троуглова $A'E'C''$, $B'E'C''$, $B'E'A''$, $C'E'A''$, $C'E'B''$ и $A'E'B''$. Нека се без умањења општости налази у троуглу $A'E'C''$. Међутим, тада је четвороугао $A'D'E'C'$ конвексан, контрадикција.



ОК 2011 3А 3а



ОК 2011 3А 3б

4. (а) Применом биномног обрасца добијамо

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{2010} \binom{2010}{k} \cdot 2011^{2010-k} \cdot i^k + \sum_{k=0}^{2010} \binom{2010}{k} \cdot 2011^{2010-k} \cdot (-1)^k \cdot i^k \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot i^{2k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot (-1)^k, \end{aligned}$$

одакле следи да је A цео број.

(б) Користећи резултат из дела под (а) добијамо

$$A = 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot (-1)^k \equiv 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot 100^k = S \pmod{101}.$$

Даље имамо

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot 100^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{1005} \binom{2010}{2k} \cdot 2011^{2010-2k} \cdot 10^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{2010} \binom{2010}{k} \cdot 2011^{2010-k} \cdot 10^k + \sum_{k=0}^{2010} \binom{2010}{k} \cdot 2011^{2010-k} \cdot (-1)^k \cdot 10^k \\ &= (2011+10)^{2010} + (2011-10)^{2010}, \end{aligned}$$

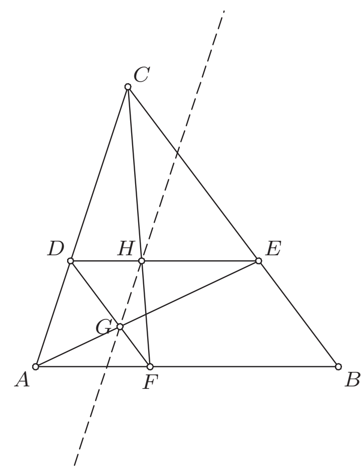
па је $A \equiv (2011+10)^{2010} + (2011-10)^{2010} \pmod{101}$. Први сабирак 2021^{2010} даје остатак 1 при дељењу са 101, јер је $2021 \equiv 1 \pmod{101}$. Пронађимо који остатак при дељењу са 101 даје други сабирак, односно 2001^{2010}. Како је 101 прост број, који не дели 2001, на основу Мале Фермаове теореме је $2001^{100} \equiv 1 \pmod{101}$, а одатле и $2001^{2000} \equiv 1 \pmod{101}$. Још је остало да нађемо остатак при дељењу броја 2001^{10} са 101. Једноставним рачуном остатака налазимо да је $2001^{10} \equiv 87 \pmod{101}$, па је

$$A \equiv 1 + 87 = 88 \pmod{101}.$$

5. Сабирањем неједнакости $2a_{k-2}-5a_{k-1}+2_k\leqslant 0$, за $2\leqslant k\leqslant n$, добијамо $3a_n-2a_{n-1}-3a_1+2a_0\leqslant 0$, тј. за $n\in\mathbb{N}$
$$3a_n\leqslant 2a_{n-1}+3. \qquad (*)$$
Тврђење сада доказујемо индукцијом. За $n=0$ тврђење очигледно важи, па је довољно доказати да ако важи за $n-1$ да важи и за n. Из $(*)$ је
$$3a_n\leqslant \frac{2}{3}a_{n-1}+1\leqslant \frac{2}{3}\cdot 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]+1=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right],$$
што је и требало доказати.

Четврти разред, А категорија

1. Праве DH и AF су паралелне, па је из Талесове теореме $\dfrac{CH}{HF}=\dfrac{CD}{DA}$. Такође, како је $DF\parallel CB$ следи $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{BF}{FA}$, па како је $BF=DE$ (четвороугао $FBED$ је паралелограм), важи $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{DE}{FA}$. Како је
$$\triangle AFG\sim\triangle EGD,$$
то је $\dfrac{DE}{FA}=\dfrac{DG}{GF}$. Из претходних једанакости добијамо
$$\frac{CH}{HF}=\frac{DG}{GF},$$
одакле је из Талесове теореме $GH\parallel AC$. (Тангента 6, стр. 6, M874)



ОК 2011 4А 1

2. Обележимо поља табле паровима из Декартовог производа $\{A,B,C,D\}\times\{1,2,3\}$.
(б) Једну домину можемо поставити на 17 различитих начина (8 вертикалних и 9 хоризонталних). Укупан број позиција је једнак броју неуређених парова домина од кога треба одузети случајеве где се неке домине преклапају. Две вертикалне домине се преклапају у 4 случаја, две хоризонталне у 6 случајева, а хоризонтална и вертикална у 24 случаја, па је тражени број једнак $\binom{17}{2}-(4+6+24)=136-34=102$.
(а) Како је овде битно која је домина постављена 1. а која 2. то свакој позицији након постваљене 2 домине одговарају 2 начина за њихово постављање (прво једна па друга домина и обратно). Стога има укупно $2\cdot 104=204$ начина да се поставе 2 домине.
(в) Победничку стратегију има први играч. Прву домину ставља у центар, тј. стави домину на поља $B2$ и $C2$, а затим домине поставља централно симетрично доминама које је поставио други играч.

3. Нека је
$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\,x-x_i\,|.$$
За $x=0$ имамо $f(0)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$, док за $x=1$ следи $f(1)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)=1-f(0)$. Из релације $f(0)+f(1)=1$ добијамо да важи или $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ или $f(0)<\dfrac{1}{2}<f(1)$ или $f(1)<\dfrac{1}{2}<f(0)$. Како је f непрекидна функција на $[0,1]$, то по Вајештрасовој теореми мора постојати $x\in[0,1]$ такво да је $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

4. Доказ изводимо индукцијом по n. Тврђење тривијално важи за $n=1$, па је довољно

доказати индуктивни корак. Нека је зато тврђење тачно за $n-1$ и докажимо да важи за n. Нека је $b_1 = a_i$ и $b_2 = a_j$. Размотримо следећа два случаја:
Први случај. Нека је i непаран и $j = i+1$, или i паран и $j = i-1$. Тада је $b_1b_2+t = a_ia_{i+1}+t$ или $b_1b_2+t = a_{i-1}a_i+t$, па тврђење важи на основу индуктивне претпоставке.
Други случај. Нека i и j нису као у првом случају. Тада се за

$$i' = \begin{cases} i-1, & 2 \mid i \\ i+1, & 2 \nmid i \end{cases} \qquad j' = \begin{cases} j-1, & 2 \mid j \\ j+1, & 2 \nmid j \end{cases}$$

чланови $b_1a_{i'}+t$ и $b_2a_{j'}+t$ не налазе са десне стране неједнакости. Приметимо да је

$$(b_1b_2+t)(a_{i'}a_{j'}+t) - (b_1a_{i'}+t)(b_2a_{j'}+t) = t(b_1-a_{j'})(b_2-a_{i'}) \geqslant 0,$$

тако да се заменом члана $(b_1a_{i'}+t)(b_2a_{j'}+t)$ (који се налази са леве стране неједнакости) са $(b_1b_2+t)(a_{i'}a_{j'}+t)$ лева страна неједнакости не смањује. Како је овако добијен израз по индуктивној претпоставци не већи од десне стране дате неједнакости, доказ је завршен.

5. Нека је $q > 2$. На основу Мале Фермаове теореме имамо $q^{2q} + (2q)^q \equiv 1 + (-1)^q \equiv 0 \pmod{p}$, те број n са наведеном особином постоји. Доказаћемо да је број n дељив са q. Уведимо ознаке $x = q^n$ и $y = n^q$. Из наведене дељивости број n не може бити дељив са p, те је на основу Мале Фермаове теореме $y^2 \equiv n^{2q} \equiv n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Одавде, како је p прост број, имамо $y \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Зато је $x \equiv \mp 1 \pmod{p}$, те је $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Како за поредак броја q по модулу p важи $r_p(q) \mid p-1 = 2q$, то је $r_p(q) \in \{1, 2, q, 2q\}$. Како је $1 < q < p$, то је $r_p(q) \neq 1$. Испитајмо да ли је могућа једнакост $r_p(q) = 2$. Уколико би ово важило, онда би имали $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$, те би важило $(q^2-1, 2q+1) = p$. Одавде $p \mid (q\cdot(2q+1) - 2\cdot(q^2-1)) = q+2$. Даље, $p \mid (2\cdot(q+2) - (2\cdot q+1)) = 3$, па је $p = 3$, односно $q = 1$. Контрадикција. Овим смо доказали да је $r_p(q) \in \{q, 2q\}$, па $q \mid r_p(q)$. Сада имамо $1 \equiv_p x^2 \equiv_p q^{2n}$, одакле $r_p(q) \mid 2n$. Имајући на уму да $q \mid r_p(q)$, као и да је q непаран број, одавде коначно добијамо $q \mid n$. Како $p \nmid q^q + q^q$, то је за $q > 2$, најмања тражена вредност броја n једнака $2q$.
За $q = 2$, односно $p = 5$, непосредном провером се утврђује да је $n = 8$.

Први разред, Б категорија

1. Скицарајмо график функције $f(x) = |x-1| - |x-2| + |x-3|$. Размотримо следећа четири случаја:

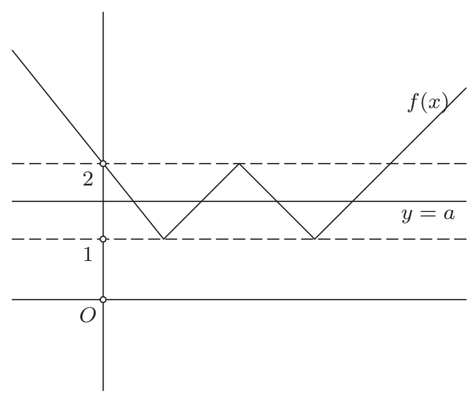
1° $x \leqslant 1$. Тада је $f(x) = -x+2$.

2° $1 < x \leqslant 2$. Тада је $f(x) = x$.

3° $2 < x \leqslant 3$. Тада је $f(x) = -x+4$.

4° $x > 3$. Тада је $f(x) = x-2$.

Потребно је одредити све вредности за a тако да права $y = a$ има тачно четири пресечне тачке са овом функцијом. Са графика функције $f(x)$ примећујемо да ово важи ако и само ако је $a \in (1,2)$. (Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци)



ОК 2011 1Б 1

2. Нека је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 2:1$, то је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{a}$, а како је $\overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NC} = 1:1$, то је $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{b}$. Како су A, S и N колинеарне тачке, то за неко λ важи $\overrightarrow{AS} = \lambda\cdot\overrightarrow{AN} = \lambda\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}) = \lambda\cdot\overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2}\cdot\overrightarrow{b}$. Са друге стране, како су тачке M, S и D колинеарне, постоји реалан број μ тако да је $\overrightarrow{MS} = \mu\cdot\overrightarrow{MD} = \mu\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}) = -\frac{2\mu}{3}\cdot\overrightarrow{a} + \mu\cdot\overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS}$, то из претходног добијамо $\lambda\cdot\overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2}\cdot\overrightarrow{b} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2\mu}{3}\right)\cdot\overrightarrow{a} + \mu\cdot\overrightarrow{b}$. Како су $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линеарно независни вектори, то је $\lambda = \frac{2}{3} - \frac{2\mu}{3}$ и $\frac{\lambda}{2} = \mu$. Решавањем овог система добијамо да је $\lambda = \frac{1}{2}$, па је $AS : SN = 1:1$.

3. Приметимо да су Аца, Бојан и Вељко укупно погодили тачан полажај за 7 цифара, па су нека двојица погодила тачан положај исте цифре. Како су једино на 3. месту нека двојица претпоставила положај исте цифре, то 3. цифра мора бити једнака 3. Ово је једина тачно претпостављена цифра за Вељка, па се број 5 не налази на 6. месту, а како се не може налазити ни на 3., то се број 5 налази на 5. месту и њен положај је претпоставио Аца. Даље, цифра 6 се не налази на 2. и 5. месту, па се налази на 6. месту, а и њен положај је претпоставио Аца. Положај осталих цифара је претпоставио Бојан, тј. 2 је на 1. месту, 4 на другом, а 1 на 4. месту, па је тражени број једнак 243156.

4. Погледати први задатак за први разред А категорије.

5. Нека је без умањења оптштости $\sphericalangle ABC \geqslant 90^\circ$. Како је $AB = CD$, то су квадрати $ABB'A'$ и $CDD'C'$ подударни, па је $O_1B = CO_3$.

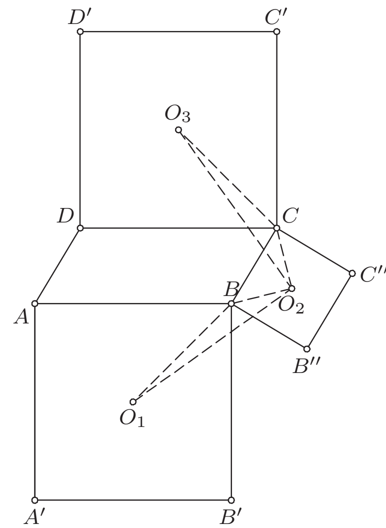
Како у квадрату $BB''C''C$ важи $BO_2 = CO_2$, то је довољно доказати да је $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_3CO_2$. Имамо

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_1BO_2 &= \sphericalangle O_1BB' + \sphericalangle B'BB'' + \sphericalangle B''BO_2\\ &= 45^\circ + \sphericalangle B'BB'' + 45^\circ\\ &= 90^\circ + \sphericalangle B'BB'',\end{aligned}$$

а како је $\sphericalangle B'BB'' = 360^\circ - \sphericalangle B'BA - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBB'' = 180^\circ - \sphericalangle ABC$, то је $\sphericalangle O_1BO_2 = 270^\circ - \sphericalangle ABC$. Са друге стране,

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_3CO_2 &= \sphericalangle O_3CD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCO_2\\ &= 45^\circ + 180^\circ - \sphericalangle ABC + 45^\circ\\ &= 270^\circ - \sphericalangle ABC,\end{aligned}$$

па је $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_3CO_2$. Сада је по ставу СУС $\triangle O_1BO_2 \cong \triangle O_3CO_2$. (Тангента 58, стр. 27, Писмени задаци)



ОК 2011 1Б 5

Други разред, Б категорија

1. Распоредимо прво оних 5 књига које могу стајати у произвољном међусобном поретку. То можемо учинити на 5! начина. Преостале књиге се могу налазити између првобитно постављених, на почетку или на крају реда, тј. на укупно 6 места, и то тако да на сваком од ових места стоји тачно једна књига. Дакле, још је потребно 5 од 6 места и затим на њих распоредити последњих 5 књига. Како је ово могуће учинити на $\binom{6}{5} \cdot 5! = 6!$, то је тражени број распореда једнак $5! \cdot 6!$. (Тангента 60, стр. 22, Писмени задаци)

2. Да бисмо доказали да су тачке D, E и F колинеарне довољно је доказати да је $\sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = 180^\circ$. Како је AEB једнакостраничан троугао, то је $\sphericalangle AEB = 60^\circ$ и $EB = AB = EA$. Даље, како је BFC једнакостраничан троугао, то је $BF = BC = AB = EB$.

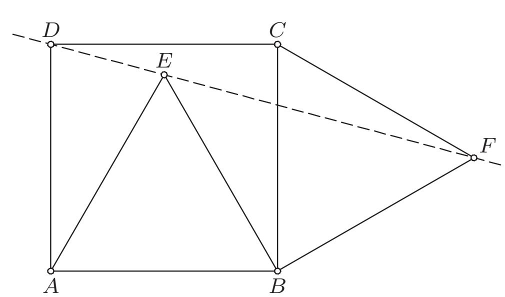
Самим тим, троугао EBF је једнакокраки, па је $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BFE$. Како је

$$\begin{aligned}\sphericalangle EBF &= \sphericalangle EBC + \sphericalangle CBF\\ &= 90^\circ - \sphericalangle ABE + \sphericalangle CBF = 90^\circ,\end{aligned}$$

то је из претходног $\sphericalangle BEF = 45^\circ$. Даље, троугао DAE је једнакокраки ($DA = EA$), па како је $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB - \sphericalangle EAB = 30^\circ$, то је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 75^\circ$. Сада је

$$\sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

што је и требало доказати. (Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци)

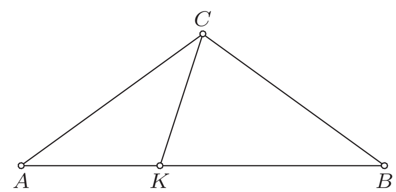


ОК 2011 2Б 2

3. Неједнакост $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leqslant d$ је еквивалентна са $\dfrac{(2-d)x^2+(2-d)x+(3-d)}{x^2+x+1} \leqslant 0$. Именилац ове неједначине је увек позитиван, јер је дискриминанта одговарајуће квадратне једначине једнака -3, а водећи коефицијент 1, па ће полазна неједначина бити испуњена за свако x уколико је бројилац претходног разломка увек негативан. То је испуњено када су водећи коефицијент и дискриминанта мањи од нуле, тј. $2-d<0$ и $(2-d)^2-4\cdot(2-d)\cdot(3-d) = (2-d)\cdot(3d-10)\leqslant 0$. Из прве неједначине је $d>2$, па из друге добијамо $d \geqslant \dfrac{10}{3}$. Самим тим, скуп добрих бројева је интервал $\left[\dfrac{10}{3}, +\infty\right)$.

4. На основици AB одредимо тачку K тако да је $\sphericalangle ACK = 36^\circ$. Нека је $|AB| = c$, $|AC| = |BC| = b$ и $|AK| = x$.

Троуглови ACK и ABC су слични, јер имају све једнаке углове, па је $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$. Како је $|BK| = c-x = b$, то се последња једнакост своди на $\dfrac{c-b}{b} = \dfrac{b}{c}$. Уколико уведемо смену $t = \dfrac{c}{b}$ добијамо еквивалентну једначину $t^2-t+1=0$. Решења ове једначине су $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, па како је $\dfrac{c}{b}>0$, то је $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



ОК 2011 2Б 4

5. Из дате једнакости је $a^2 = c^2-b^2 = (c-b)(c+b)$, па како је a прост број, а $c-b<c+b$ (b и c су природни бројеви), то је $c-b=1$ и $c+b=a^2$. Из ових једнакости је $c=b+1$ и $a^2=2b+1$. Како за $b=1$ и $b=2$ број a није прост, то је $b\geqslant 3$. За $b\geqslant 3$ је $b^2\geqslant 3b>2b+1$, па је $a^2<b^2$, тј. $a<b$, што је и требало доказати.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је оштар угао ромба једнак β. Како је лопта уписана у призму, то је висина призме као и висина ромба једнака $2R$, где је R полупречник лопте. Сада, из дефиниције угла α, закључујемо да је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2R}{d}$, где је d дужина дуже дијагонале датог ромба. Уколико је a страница ромба, то је $d = 2a\cos\dfrac{\beta}{2}$ и $a\sin\beta = 2R$. Сада је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\beta}{2a\cos\dfrac{\beta}{2}} = \sin\frac{\beta}{2},$$

односно $\beta = 2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$. (Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци)

2. Прву цифру броја можемо изабрати на 9 начина. Друга цифра може бити различита од прве цифре или једнака првој цифри. У случају да је друга цифра различита од прве можемо је изабрати на 9 начина. Тада за трећу и четврту цифру можемо одабрате једну од цифара које се налазе на првом и другом месту, па је укупан број бројева у овом случају једнак $9\cdot 9\cdot 2\cdot 2$. Размотримо сада случај када је друга цифра једнака првој. Сличним разматрањем као у претходном случају закључујемо да постоји $9\cdot 9\cdot 2$ бројева код којих је трећа цифра различита од прве две. На крају, уколико су прве три цифре једнаке четврту можемо одабрати на 9 начина, па је број оваквих бројева једнак $9\cdot 9$. Дакле, тражени број је једнак $9\cdot 9\cdot 2\cdot 2+9\cdot 9\cdot 2+9\cdot 9 = 567$. (Тангента 56, стр. 24, Писмени задаци)

3. Дата неједначина дефинисана је за бројеве $x\in[2,\infty)$. Како за свако $x>2$ важи

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-2}+x > \sqrt{2^2-3}+0+2 = 3,$$

а $x=2$ није решење дате неједначине, то су решења елементи скупа $(2,\infty)$.

4. Област дефинисаности за полазну једначину је скуп $[-1,1]$. Како за свако $x\in[-1,1]$ важи

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, то је дата једначина еквивалентна са

$$4^{x\arcsin x} + 4^{x(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

Уколико ову једначину помножимо са $4^{x\arcsin x}$, добијамо еквивалентну једначину

$$(4^{x\arcsin x})^2 + 4^{\frac{\pi x}{2}} - 2^{\frac{2+\pi x}{2}} \cdot 4^{x\arcsin x} = (4^{x\arcsin x} - 2^{\frac{\pi x}{2}})^2 = 0.$$

Дакле, решења полазне једначине су решења једначине $4^{x\arcsin x} - 2^{\frac{\pi x}{2}} = 0$. Ова једначина је еквивалентна са $2x\arcsin x = \dfrac{\pi x}{2}$, па је $x = 0$ или $\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$, тј. $x \in \left\{0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

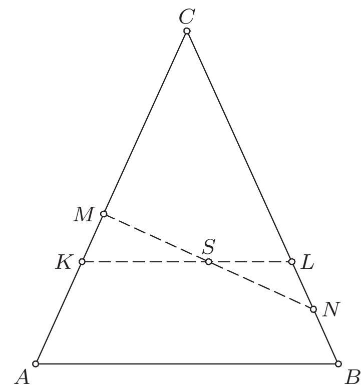
5. Нека је $KL \cap MN = \{S\}$. Означимо $\sphericalangle SKC = \alpha$, $\sphericalangle SMA = \beta$, $\sphericalangle SNL = \gamma$, $\sphericalangle LSN = \omega$. Нека, без умањења општости, важе следећи распореди $A - K - M - C$ и $B - N - L - C$. Из синусних теорема примењених на троуглове KMS и LNS добијамо

$$\begin{aligned} KS &= MS \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = MS \cdot \frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha}, \\ SL &= SN \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = MS \cdot \frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} KL &= KS + SL = MS \cdot \frac{2\sin\alpha\cos\omega}{\sin\alpha} \\ &= 2 \cdot MS \cdot \cos\omega \end{aligned}$$

и самим тим $KL = MN \cdot \cos\omega$, што је требало доказати.



ОК 2011 3Б 5

Четврти разред, Б категорија

1. Из $a = \log_{10} 2$ следи $\dfrac{1}{a} = \log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$. Одатле је $\log_2 5 = \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a}$, што повлачи $\log_5 2 = \dfrac{a}{1-a}$.

Из $a = \log_{10} 2$ и $b = \log_{10} 3$ добијамо да је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \log_3 2$.

Из $b = \log_{10} 3$ следи $\dfrac{1}{b} = \log_3 10 = \log_3 2 + \log_3 5 = \dfrac{a}{b} + \log_3 5$. Одатле је $\log_3 5 = \dfrac{1}{b} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{1-a}{b}$, што повлачи $\log_5 3 = \dfrac{b}{1-a}$.

Коначно имамо да је $\log_5 216 = \log_5(2^3 \cdot 3^3) = 3(\log_5 2 + \log_5 3) = 3 \cdot \dfrac{a+b}{1-a}$.

2. Координате тачке A су решења система $y = mx$, $y = x^2$. Како је $k > 0$, то је из претходног $A(k, k^2)$. Слично, B је решење система $y = -\left(k + \dfrac{1}{k}\right) \cdot x$, $y = x^2$. Како је $-k - \dfrac{1}{k} < 0$, то је из претходног $B\left(-k - \frac{1}{k}, k^2 + \frac{1}{k^2} + 2\right)$. Сада је

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA} = (k, k^2) \cdot \left(2k + \frac{1}{k}, -\frac{1}{k^2} - 2\right) = 0,$$

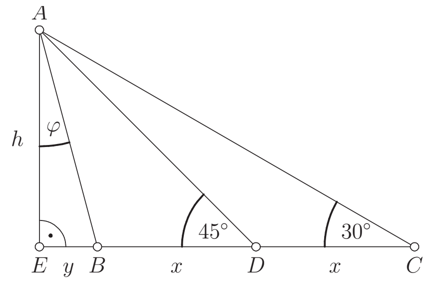
што значи да је $\sphericalangle OAB = 90^\circ$, па $\triangle OAB$ никад није оштроугли.

3. Функција f је непрекидна на сваком од интервала $[0, 64)$ и $(64, +\infty)$, па је довољно одредити a такво да је функција непрекидна у тачки 64, тј. да је $\lim\limits_{x\to 64} f(x) = f(64) = a$. Како је

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt[6]{x})^3-8}{(\sqrt[6]{x})^2-4} = \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt[6]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+4)}{(\sqrt[6]{x}-2)(\sqrt[6]{x}+2)} = \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+4}{\sqrt[6]{x}+2} = 3,$$

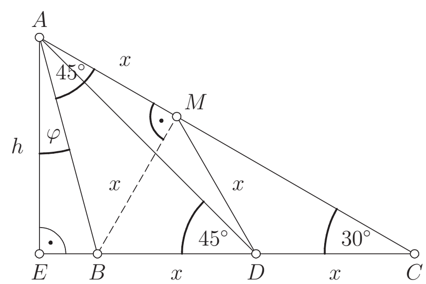
то је $a = 3$. (Тангента 62, страна 37, Писмени задаци)

4. **Прво решење.** Означимо са $\sphericalangle BAE = \varphi$, $AE = h$, $BE = y$, $BD = DC = x$.



Из једнакокрако–правоуглог $\triangle AED$ имамо да је $x + y = h$. Из половине једнакостраничног $\triangle AEC$ имамо да је $2x + y = h\sqrt{3}$.
Решавањем овог система (по x и y) добијамо да је $x = h(\sqrt{3} - 1)$ и $y = h(2 - \sqrt{3})$.
Одавде добијамо да је $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{h} = 2 - \sqrt{3}$. Како је $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 7 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, добијамо да је $2\varphi = 30^\circ$ одакле следи $\varphi = 15^\circ$.

Друго решење. Нека је M подножје нормале из B на AC.



Троугао $\triangle BCM$ је половина једнакостраничног, а троугао $\triangle BDM$ је једнакостранични, па важи

$$BM = BD = DC = DM = x.$$

Даље, угао $\sphericalangle ADM$ износи 15° ($\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDM - \sphericalangle BDA = 60^\circ - 45^\circ$), па је троугао $\triangle ADM$ једнакокрак, одакле је (уз горње једнакости) $AM = DM = x$, тј. $AM = BM$. Дакле, троугао $\triangle AMB$ јесте једнакокрако-правоугли, па угао $\sphericalangle BAM$ износи 45°. Како је $\triangle CEA$ правоугли, добијамо да је $\sphericalangle CAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а одатле је угао $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE - \sphericalangle BAM = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

5. Парови највеће и најмање цифре могу бити $(9, 2)$, $(8, 1)$, $(7, 0)$. За остале 4 цифре тих шестоцифрених бројева у сваком од ова три случаја имамо по 6 могућности, па их можемо изабрати на $\binom{6}{4}$ начина. Одабраних 6 различитих цифара можемо рапосредити на 6! начина. Од укупног броја распореда оваквих распореда треба одузети број оних распореда који почињу цифром 0, јер они не представљају шестоцифрене бројеве. Ти распореди се јављају када је највећа цифра 7, а најмања 0, и има их $\binom{6}{4} \cdot 5!$. Дакле, укупан број шестоцифрених бројева са траженим својством је

$$3 \cdot \binom{6}{4} \cdot 6! - \binom{6}{4} \cdot 5! = 30600.$$

(Тангента 60, стр. 5, М864)