РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

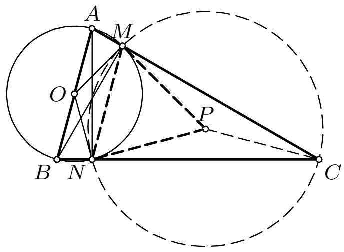
Први разред, А категорија

1. Како је $3xyz > 0$, следи $x > y, z$, одакле је $4x > 2(y+z) = x^2$, тј. $x < 4$. Из $x^2 = 2(y+z)$ следи $2 \mid x$, па мора бити $x = 2$. Тада мора бити $y = z = 1$, а ова тројка и задовољава систем из задатка и притом је $x + y + z = 4$.

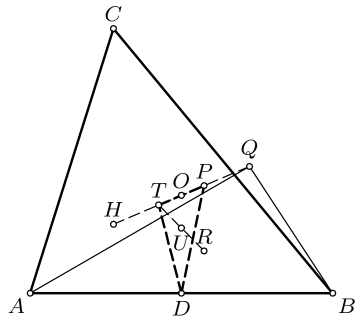
2. Ако је тврђење задатка тачно, за $n = 11$ следи да постоји природан број x чији је збир цифара $(s(x))$ једнак 11, који је дељив са 11 и који при дељењу са 100 даје остатак 11. Нека су $n(x)$ и $p(x)$ збирови цифара на непарним, односно парним позицијама декадног записа броја x, редом. Како је x дељив са 11 важи $11 \mid n(x) - p(x)$, а како је $11 = s(x) = n(x) + p(x)$, следи да је један $n(x)$ и $p(x)$ једнак 0, а други 11. Ово није могуће, јер је $x \equiv 11 \pmod{100}$ (тј. $n(x), p(x) \geqslant 1$).

Дакле, за $n = 11$ не постоји x са захтеваним особинама, па тврђење из задатка није тачно.

3. Нека је O центар кружнице k. Како је $\sphericalangle BNA = \sphericalangle BMA = 90^\circ$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAN = 90^\circ - \sphericalangle BCA$, па је $\sphericalangle MON = 2 \cdot \sphericalangle MAN = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BCA$ (централни и периферијски угао). Како су PM и PN тангенте на k, следи $\sphericalangle PMO = \sphericalangle ONP = 90^\circ$, четвороугао $NPMO$ је тетиван, па је $\sphericalangle NPM = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BCA) = 2 \cdot \sphericalangle BCA$. Кружница са центром у P и полупречника PN садржи M (једнакост тангентних дужи), а по претходном и C (централни и периферијски угао). Како је и $PC = MN$, следи $PM = MN = NP$, тј. $\triangle PMN$ је једнакостраничан. Дакле, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle NCM = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle NPM = 30^\circ$ (Тангента 57, стр. 15, Наградни задаци, M821).



ОК 10 1А 3



ОК 10 1А 4

4. Нека је $x = \overrightarrow{OX}$ за $x \in \{a, b, c, h, t, d, p, q, r, u\}$ (тј. малим латиничним словом је означен вектор који спаја центар описане кружнице и тачку означену истим великим латиничним словом). Тада је $t = \frac{a+b+c}{3}$, $h = a + b + c$ (особине тежишта и ортоцентра), $d = \frac{a+b}{2}$ (средиште дужи), $p = -\frac{a+b+c}{3}$, $q = -(a + b + c)$ (по симетрији), $r = \frac{1}{3} \cdot (a + b + q) = \frac{1}{3} \cdot (a + b - a - b - c) = -\frac{c}{3}$ (тежиште $\triangle ABQ$).

Нека је V тежиште $\triangle DPT$. Тада је $v = \overrightarrow{OV} = \frac{1}{3} \cdot (d + p + t) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{a+b}{6}$. Како је $v = \frac{d}{3}$, следи $O{-}V{-}D$; како је $2(v - r) = 2 \cdot \left(\frac{a+b}{6} + \frac{c}{3}\right) = \frac{a+b+2c}{3} = t - r$, следи $R{-}V{-}T$; дакле, V припада правама OD и RT, па је $U \equiv V$ (из $BC \neq CA$ следи $OD \not\equiv RT$).

Друго решење. На основу особина Ојлерове праве је $\frac{HT}{TO} = 2$, па је $\frac{QP}{PO} = 2$; како је и $\frac{QR}{RD} = 2$ (тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$), следи $PR \parallel OD$ и $OD = \frac{3}{2} \cdot PR$. Како је O средиште TP, OD је средња линија $\triangle PRT$, па је $OU = \frac{1}{2} \cdot PR = \frac{1}{3} \cdot OD$, тј. $\frac{DU}{UO} = 2$. Следи да је U тажиште $\triangle DPT$.

5. Ако се два суседна места на којима пар седи посматра као блок, када се сви сместе у реду ће бити 6 блокова и 8 празних места.

Блокови и празна места могу се у ред поређати на $\binom{14}{6}$ начина; парови се придружују блоковима на $6!$ начина; сваки пар може сести у изабрани блок на два начина (што даје 2^6 могућности).

Дакле, укупан број распореда је $\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^6$.

Први разред, Б категорија

1. Како је $|a| = a$ за $a \geqslant 0$ и $|a| = -a$ за $a < 0$, следи:

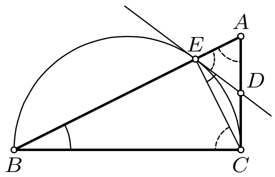
1° Ако је $x < -\frac{1}{2}$, једначина постаје $-(2x+1)-(x-1)=2-x$, одакле је $x=-1$ (што је мање од $-\frac{1}{2}$).

2° Ако је $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, једначина постаје $(2x+1)-(x-1)=2-x$, одакле је $x=0$ (што припада скупу $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$).

3° Ако је $x \geqslant 1$, једначина постаје $(2x+1)+(x-1)=2-x$, одакле је $x=\frac{1}{2}$. Међутим, како $\frac{1}{2} \notin [1,\infty)$, ово није решење.

Дакле, решење је $x \in \{-1, 0\}$, тј. једначина има два решења (Тангента 56, стр. 25, Писмени задаци, задатак 8).

2. Како је $\sphericalangle DEC = \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABC$ (тетивни и тангентни угао) и како је $\sphericalangle AEC = 180^\circ - \sphericalangle CEB = 90^\circ$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle AED = 90^\circ - \sphericalangle DEC = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$, тј. $\triangle DAE$ је једнакокраки (Тангента 58, стр. 31, Писмени задаци, задатак 5).



ОК 10 1Б 2

3. Како је $11^2 \equiv 121 \equiv 21 \pmod{100}$, $11^4 \equiv 21^2 \equiv 441 \equiv 41 \pmod{100}$, $11^8 \equiv 41^2 \equiv 1681 \equiv 81 \pmod{100}$, $11^{10} \equiv 11^2 \cdot 11^8 \equiv 21 \cdot 81 \equiv 1701 \equiv 1 \pmod{100}$, следи $2011^{2010} \equiv 11^{2010} \equiv 1 \pmod{100}$, па је цифра десетица броја 2011^{2010} једнака 0.

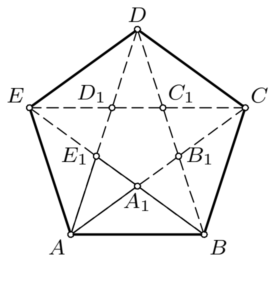
4. Како постоји посета између Ане и Бебе, једна од њих две је Дацу посетила ујутро, а друга увече. Како Ана није посетила Дацу и пре Весне и пре Гоце, следи да је Анина посета била увече. Дакле, Бебина посета је била ујутро, па су Весна и Гоца Дацу посетиле након ње. Пошто Весна није посетила Дацу између Бебе и Гоце, следи да је Гоцина посета била ујутро, а Бебина увече.

Дакле, редослед посета је Беба–Гоца–Ана–Весна.

5. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $AB = a$ (страница петоугла $ABCDE$), а $A_1B_1 = x$ (страница петоугла $A_1B_1C_1D_1E_1$). Унутрашњи угао правилног петоугла је $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Следи $\sphericalangle EAB = 108^\circ$, а како је $\triangle EAB$ једнакокраки, следи $\sphericalangle ABE_1 = \sphericalangle E_1EA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Слично, $\triangle EAE_1$ је једнакокраки, па следи $\sphericalangle EAE_1 = 36^\circ$, односно (спољни угао у троуглу) $\sphericalangle BE_1A = \sphericalangle E_1EA + \sphericalangle EAE_1 = 72^\circ$. Како је и $\triangle AA_1E_1$ једнакокраки, следи $\triangle ABE_1 \sim E_1AA_1$ и $AB = BE_1 = BA_1 + A_1E_1 = AA_1 + A_1E_1 = AE_1 + A_1E_1$. Из сличности следи $\frac{AB}{AE_1} = \frac{AE_1}{A_1E_1}$. Дакле, $AE_1 = a - x$, $\frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x}$, одакле је $\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{a}{x} + 1 = 0$, тј. (јер је $\frac{a}{x} > 1$) $\frac{a}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



ОК 10 2А 1

Како се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих линеарних елемената, следи $\dfrac{P(ABCDE)}{P(A_1B_1C_1D_1E_1)} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ (Тангента 55, стр. 28, Наградни задаци, M781).

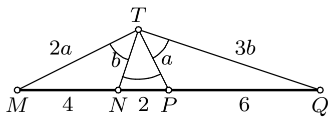
2. Играчи A и B су одиграли $k+\delta$ партија, где је $\delta=0$ ако су A и B одиграли партију, а $\delta=1$ ако нису. Преостали играчи су одиграли $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија, па је $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+k+\delta=55$, односно $n^2-5n+2k+2\delta=104$. Како је $k\geqslant 1$ и $\delta\geqslant 0$, следи $n^2-5n+2k+2\delta\geqslant n^2-5n+2$, одакле је $n^2-5n\leqslant 102$, а како је $n\in\mathbb{N}$, следи $n\leqslant 12$. Како је $k\leqslant n-3$ и $\delta\leqslant 1$, следи $n^2-5n+2k+2\delta\leqslant n^2-5n+2n-6+2$, одакле је $108\leqslant n^2-3n$, а како је $n\in\mathbb{N}$, следи $n\geqslant 12$. Притом, ако је $k<n-3$ или $\delta<1$, у последњој неједнакости се добија $108<n^2-3n$, тј. $n>12$, па у овој ситуацији нема решења.

Дакле, $n=12$, $k=n-3=10$ и $\delta=1$, тј. A и B нису играли међусобно.

3. Нека је $TP=a$, $TN=b$. Како је TN симетрала $\sphericalangle PTM$, следи $\frac{TM}{TP}=\frac{MN}{NP}=2$, тј. $TM=2a$. Како је TP симетрала $\sphericalangle QTN$, следи $\frac{TQ}{TN}=\frac{PQ}{NP}=3$, тј. $TQ=3b$.

Применом косинусне теореме на $\triangle TMN$, $\triangle TNP$, $\triangle TPQ$ следи

$$\begin{aligned}4a^2 &+ b^2 - 4ab\cos\alpha = 16,\\ a^2 &+ b^2 - 2ab\cos\alpha = 4,\\ a^2 &+ 9b^2 - 6ab\cos\alpha = 36.\end{aligned}$$



ОК 10 2А 3

Решавањем овог система (систем линеарних једначина по $a^2, b^2, ab\cos\alpha$) добија се

$a^2=\frac{36}{5}, b^2=\frac{32}{5}, ab\cos\alpha=\frac{24}{5}$, одакле ($a,b>0$) следи $a=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, b=\frac{6}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{24}{5ab}=\dfrac{24}{5\cdot\frac{24\sqrt{2}}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $\alpha=45^\circ$.

4. За свака два различита цела броја a и b и $p\in\mathbb{Z}[x]$ важи $a-b\mid p(a)-p(b)$. Ако је n сложен број који задовољава услове задатка, нека је d његов делилац такав да је $1<d<n$; следи $n-d\mid p(n)-p(d)=1-\frac{n}{d}$, односно $\frac{1-\frac{n}{d}}{n-d}=-\frac{1}{d}\in\mathbb{Z}$. Како је $d>1$, следи $\left|-\frac{1}{d}\right|<1$, па је $-\frac{1}{d}\notin\mathbb{Z}$. Ако је n прост број, полином $p(x)=-x+n+1\in\mathbb{Z}[x]$ задовољава $p(1)=n$ и $p(n)=1$, тј. прости бројеви су решења задатка. Како је то и $n=1$ (може се узети $p(x)=1$), следи да су природни бројеви који задовољавају наведене услове 1 и сви прости бројеви.

5. Ако је $a^2+b^2=1$, следи

$$\begin{aligned}a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=1-2a^2b^2,\\ a^6+b^6 &= (a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)=1-3a^2b^2, \quad \text{па је}\\ \frac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1} &= \frac{-2a^2b^2}{-3a^2b^2}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ако је $\dfrac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1}=\dfrac{2}{3}$, следи

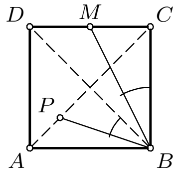
$$\begin{aligned}0 &= 3(a^4+b^4)-2(a^6+b^6)-1\\ &= 3(a^2+b^2)^2-6a^2b^2-2(a^2+b^2)^3+6a^2b^2(a^2+b^2)-1\\ &= 2(a^2+b^2)^2(1-a^2-b^2)+(a^2+b^2)^2-1-6a^2b^2(1-a^2-b^2)\\ &= (1-a^2-b^2)\left(2(a^2+b^2)^2-1-a^2-b^2-6a^2b^2\right),\end{aligned}$$

па је довољно доказати да је $S=2(a^2+b^2)^2-1-a^2-b^2-6a^2b^2\neq 0$ за $a^2+b^2=t\neq 1$. Тада је $S=2t^2-t-1-6a^2b^2=(t-1)(2t+1)-6a^2b^2$. Ако је $t<1$, следи $S<0$. Ако је $t>1$, тада је $a^2b^2>t-1\Leftrightarrow a^2(t-a^2)>t-1\Leftrightarrow 0<a^2t-t+1-a^4=(1-a^2)(-t+1+a^2)=(1-a^2)(1-b^2)$, што је тачно ($a,b\in(0,1)$, па је $1-a^2, 1-b^2>0$). Због $a,b\in(0,1)$ је и $t=a^2+b^2<2$, па важи $S=(t-1)(2t+1)-6a^2b^2<(t-1)(2t+1)-6(t-1)=(t-1)(2t-5)<0$.

Други разред, Б категорија

1. Како је M средиште BC, следи $\frac{BC}{CM}=2$. Како је P средиште AS и $AS=SB$, следи $\frac{BS}{SP}=2$.

Важи и $\sphericalangle BCM = 90^\circ = \sphericalangle BSP$ (дијагонале квадрата се секу под правим углом), па је $\triangle BCM \sim \triangle BSP$. Специјално, $\sphericalangle PBS = \sphericalangle MBC$ (Тангента 52, стр. 47, Писмени задаци, задатак 5).



OK 10 2B 1

2. Ако је $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, једначина је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$ и овом сменом постаје $\sqrt{t} = 2 - t$. За $t > 2$ она нема решења (стране су различитих знака), а за $t \leqslant 2$ је еквивалентна са $t = (2-t)^2 = 4 - 4t + 4 \Leftrightarrow 0 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$. Због $t \leqslant 2$ следи $x^2 + x + 1 = t = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}$ (Тангента 55, стр. 44, Писмени задаци, задатак 2).

3. Из услова задатка је $(x+y+1)^2 = (x^2+y^2) + 1 + 2(x + xy + y) = 11 + 6\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^2$.

1° Ако је $x+y+1 = -3-\sqrt{2}$, тј. $x+y = -4-\sqrt{2}$ и $xy = 2+3\sqrt{2}-(-4-\sqrt{2}) = 6+4\sqrt{2}$, x и y су корени квадратне једначине $t^2+(4+\sqrt{2})t+(6+4\sqrt{2}) = 0$. Међутим, дискриминанта ове једначине је $(4+\sqrt{2})^2 - 4\cdot(6+4\sqrt{2}) = -6-8\sqrt{2} < 0$, па она нема реалних решења.

2° Ако је $x+y+1 = 3+\sqrt{2}$, тј. $x+y = 2+\sqrt{2}$ и $xy = 2+3\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, x и y су корени квадратне једначине $t^2 - (2+\sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0$ (тј. 2 и $\sqrt{2}$).

Дакле, решење је $(x,y) \in \big\{(2,\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2)\big\}$.

4. Играчи A и B су одиграли 10 партија ако су играли међусобно, односно 11 партија ако нису играли међусобно, а преостали играчи су одиграли $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија.

1° Ако A и B нису одиграли партију, следи $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 11 = 55$, тј. $n^2 - 5n - 82 = 0$. Међутим, ова једначина нема целобројних решења.

2° Ако су A и B одиграли партију, следи $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 10 = 55$, тј. $n^2 - 5n - 84 = 0 \Leftrightarrow n \in \{-7, 12\}$, односно $n = 12$ (јер је $n \in \mathbb{N}$).

Дакле, на турниру је учествовало 12 играча, а A и B су играли међусобно.

5. Нека је k број Перицине куће.

1° Ако $3 \mid k$, на основу прве изјаве је $50 \leqslant k \leqslant 59$, тј. мора бити $k \in \{51, 54, 57\}$. Како ниједан од тих бројева није дељив са 4, на основу друге изјаве је $60 \leqslant k \leqslant 69$. Како не може бити $k \leqslant 59$ и $k \geqslant 60$, следи да је ова ситуација немогућа.

2° Ако $3 \nmid k$, тада $6 \nmid k$, па, на основу треће изјаве, следи $70 \leqslant k \leqslant 79$. Takoђе $4 \mid k$, иначе би, по другој изјави, следило $60 \leqslant k \leqslant 69$, тј. $k \leqslant 69$ и $k \geqslant 70$, што је немогуће.

Дакле, $70 \leqslant k \leqslant 79$, $3 \nmid k$, $4 \mid k$. Једини број који задовољава претходне особине је 76 (између 70 и 79 постоје два броја дељива са 4 – то су 72 и 76, али је 72 дељив са 3).

Дакле, број Перицине куће је 76.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $m = \sum\limits_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!)$. Тада је

$$\sum_{k=1}^{n-3}(k\cdot k!) = \sum_{k=1}^{n-3}((k+1-1)\cdot k!) = \sum_{k=1}^{n-3}((k+1)! - k!) = (n-2)! - 1.$$

Ако је n сложен број, пошто за $n \geqslant 4$ важи $\frac{n}{2} \leqslant n-2$, постоји $d > 1$ тако да $d \mid n$ и $d \leqslant n-2$, па $d \mid (n-2)!$ и $d \nmid m$, односно $n \nmid m$. Ако је n прост број, на основу Вилсонове теореме

$n \mid (n-1)!+1=(n-1)m+n$, тј. $n \mid (n-1)m$. Како је $(n,n-1)=1$, одавде и $n \mid m$ (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, М792).

2. Како је x_i (за $i \in \{1,2,\dots,2010\}$) нула полинома $x^{2010}+20x+2$, следи $x_i^{2010}=-20x_i-2$, одакле је $x_i^{2011}=-20x_i^2-2x_i$. На основу Виетових формула следи $\sum_{i=1}^{2010} x_i = 0$ и $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2010} x_ix_j=0$, па је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2010} x_i^{2011} &= \sum_{i=1}^{2010}\left(-20x_i^2-2x_i\right) = -20\cdot\sum_{i=1}^{2010} x_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{2010} x_i\\ &= -20\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{2010} x_i\right)^2 - 2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2010} x_ix_j\right) - 2\cdot\sum_{i=1}^{2010} x_i\\ &= -20\cdot\left(0^2-2\cdot 0\right)-2\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

3. Ако је $n=3$, важи $z_1+z_2=-z_3$, одакле је $|z_3|^2=|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$, тј. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-|z_1|^2$. Следи $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2=3\cdot|z_1|^2$. Аналогно је $|z_2-z_3|=3\cdot|z_1|^2=|z_3-z_1|^2$, одакле је $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$, тј. тачке одређене бројевима z_1,z_2 и z_3 чине једнакостраничан троугао.

Ако је $n>3$ паран број, $n=2k, k\geqslant 2$, нека су $z_1,z_2,\dots,z_k$ различити бројеви модула 1, нека припадају унутрашњости првог квадранта ($\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i > 0$ за $i\in\{1,2,\dots,k\}$; такав избор постоји) и нека је $z_{k+i}=-z_i$ за $i\in\{1,2,\dots,k\}$. Важи $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_{2k}|$ и $z_1+z_2+\ldots+z_{2k}=0$. Уколико је $2k$-тоугао одређен овим тачкама правилан, он се ротацијама око свог центра (0) за $i\cdot\frac{\pi}{k}$ (за $i\in\{1,2,\dots,2k\}$) слика у себе, па пошто има тачку у унутрашњости првог квадранта, мора је имати и у унутрашњости сваког квадранта (јер је $k\geqslant 2$, па је $\frac{\pi}{k}$ оштар угао). Међутим, по кострукцији он нема тачака у унутрашњости другог квадранта, па не може бити правилан.

Ако је $n>3$ непаран број, $n=2k+3, k\geqslant 1$, нека су $z_2,z_3,\dots,z_{k+1}$ различити бројеви модула 1, нека припадају унутрашњости првог квадранта ($\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i>0$ за $i\in\{2,3,\dots,k+1\}$) и нека је $\frac{1}{2}>\operatorname{Re} z_2>\operatorname{Re} z_3>\ldots>\operatorname{Re} z_{k+1}$ (такав избор постоји). Нека је $z_{k+2+i}=-z_i$ за $i\in\{2,3,\dots,k+1\}$ и нека је $z_1=-1$, $z_{k+2}=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_{k+3}=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Важи $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_{2k+3}|$ и $z_1+z_2+\ldots+z_{2k+3}=z_1+z_{k+2}+z_{k+3}=0$ и ово је скуп различитих тачака (z_{k+3} је у унутрашњости четвртог крадранта, а $z_{k+3}\notin\{z_2,z_3,\dots,z_{k+1}\}$, јер је $\operatorname{Re} z_{k+2}=\frac{1}{2}$). Уколико је $(2k+3)$-угао одређен овим тачкама правилан, он се ротацијама око свог центра (0) за $i\cdot\frac{2\pi}{2k+3}$ (за $i\in\{1,2,\dots,2k+2\}$) слика у себе, па пошто има тачку у унутрашњости првог квадранта, мора је имати и у унутрашњости сваког квадранта (јер је $k\geqslant 1$, па је $\frac{2\pi}{2k+3}$ оштар угао). Међутим, по кострукцији он нема тачака у унутрашњости другог квадранта, па не може бити правилан.

Дакле, тврђење је тачно за $n=3$, иначе није.

4. Нека је $b(n)$ (за $n\in\mathbb{N}$) број подскупова скупа $\{1,2,\dots,n\}$ који не садрже три узастопна природна броја. Нека је $n\geqslant 4$, P подскуп скупа $\{1,2,\dots,n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и $m=\max\{\{1,2,\dots,n\}\setminus P\}$ (за $n\geqslant 4$ претходни максимум је добро дефинисан). Мора бити $m\in\{n-2,n-1,n\}$ (иначе $n-2,n-1,n\in P$).

1° Ако је $m=n$, P је подскуп скупа $\{1,2,\dots,n-1\}$ који не садрзи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа $\{1,2,\dots,n-1\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1,2,\dots,n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m=n$ (заправо, исти тај подскуп). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-1)$.

2° Ако је $m=n-1$, P садржи n, а $P\setminus\{n\}$ је подскуп скупа $\{1,2,\dots,n-2\}$ који не садржи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа $\{1,2,\dots,n-2\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1,2,\dots,n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m=n-1$ (исти тај подскуп коме се дода елемент n). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-2)$.

3° Ако је $m=n-2$, P садржи $n-1$ и n, а $P\setminus\{n-1,n\}$ је подскуп скупа $\{1,2,\dots,n-3\}$ који не садржи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа

$\{1, 2, \dots, n-3\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m = n-2$ (исти тај подскуп коме се додају елементи $n-1$ и n). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-3)$.

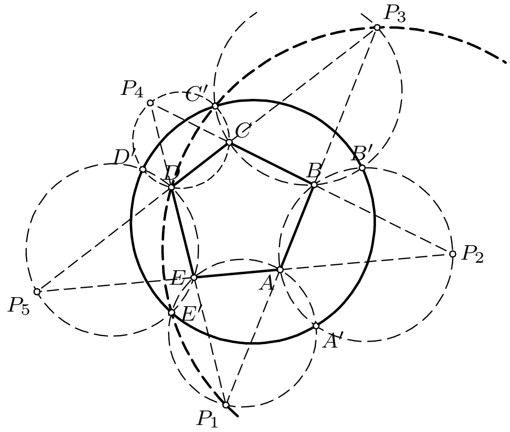
Дакле, $b(n) = b(n-1) + b(n-2) + b(n-3)$ за свако $n \geqslant 4$. Како је $b(1) = 2, b(2) = 4, b(3) = 7$, узастопном применом формуле се добија $b(10) = 504$.

5. Нека су тачке A', B', C', D' и E' распоређене као на слици (решење је аналогно и у другим ситуацијама). Како је четвороугао $BP_3C'C$ тетиван, следи $\sphericalangle P_1P_3C' = \sphericalangle BP_3C' = \sphericalangle P_4CC' = \sphericalangle P_4DC' = 180^\circ - \sphericalangle C'DP_1$, па су тачке P_1, P_3, C' и D на истом кругу. Због симетрије том кругу припада и E'. Користећи тетивност четвороугла $AA'B'B$ и како су углови над истом ттивом једнаки, следи

$$\begin{aligned}\sphericalangle A'B'C' &= \sphericalangle A'B'B + \sphericalangle BB'C' = \sphericalangle A'AP_1 + \sphericalangle BP_3C' \\ &= A'E'P_1 + \sphericalangle P_1P_3C' = P_1E'C' - \sphericalangle A'E'C' + \sphericalangle P_1P_3C'.\end{aligned}$$

Како је четвороугао $P_1P_3C'E'$ тетиван, важи $\sphericalangle P_1E'C' + \sphericalangle P_1P_3C' = 180^\circ$, па је $\sphericalangle A'B'C' = 180^\circ - \sphericalangle A'E'C'$, односно тачке A', B', C' и E' припадају истом кругу, а због симетрије том кругу припада и D'.

Напомена. Ово тврђење је познато и као Микелова пентаграм теорема.



ОК 10 3А 5

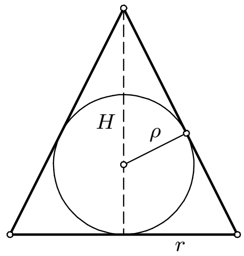
Трећи разред, Б категорија

1. За све $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$ је $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} = 0$ и $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x}$, па је и $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$. Следи

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) &= \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \\ \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) &= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \\ \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \times \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\right) &= \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a},\end{aligned}$$

одакле се сабирањем добија тврђење задатка (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 3).

2. Пресек купе и равни која садржи осу купе и пречник основе купе је једнакокраки троугао основице $2r$, висине H, крака s и полупречника уписане кружнице ρ. Из формула за површину тог троугла следи $\frac{2r \cdot H}{2} = \rho(2r + 2s)$.
Следи $r(H - \rho) = \rho s$, а како је $s^2 = r^2 + H^2$, добија се $r^2(H-\rho)^2 = \rho^2(H^2 + r^2) = \rho^2H^2 + \rho^2r^2 \Leftrightarrow r^2\left(H^2 - 2H\rho\right) = H^2\rho^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{H^2 - 2H\rho}{H^2\rho^2} = \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho H}$ (Тангента 56, стр. 34, Писмени задаци, задатак 1).



ОК 10 ЗБ 2

3. За $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ је $\sin y, \cos y \neq 0$, па је систем еквивалентан са $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y$, $\dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y$. Сабирањем ове две једначине добија се $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin y \cos y} = 2$, тј. $\sin(x+y) = \sin 2y \Leftrightarrow 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+3y}{2} = 0$. Из $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ следи $-\frac{\pi}{4} < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{4}$, па ако је $\sin\frac{x-y}{2} = 0$ следи $x = y$; међутим, тада из полазних једначина следи $\sin x = 2\sin^3 x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ (јер је $\sin x > 0$); тада је $y = \frac{\pi}{4}$. Из $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ следи $0 < \frac{x+3y}{2} < \pi$, па ако је $\cos\frac{x+3y}{2} = 0$ следи $x + 3y = \pi$; међутим, тада из полазних једначина следи $\sin 3y = \sin(\pi - 3y) = \sin x = 2\sin^3 y \Leftrightarrow 3\sin y - 4\sin^3 y = 2\sin^3 y \Leftrightarrow \sin y = 2\sin^3 y \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$ (јер је $\sin y > 0$); тада је $x = \frac{\pi}{4}$.

Провером, $x = y = \dfrac{\pi}{4}$ је решење, па је ово једино решење система из задатка.

4. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

5. Видети решење петог задатка за други разред Б категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

2. Нека је $\sin x = t$ и $g(t) = t + \dfrac{2}{3+t} + b$. g је диференцијабилна на $(0,1)$ и важи $g'(t) = \dfrac{7+6t+t^2}{(3+t)^2}$, па је g растућа на $[-1,1]$ ($\frac{-6+\sqrt{6}}{2} < \frac{-6+3}{2} = -\frac{3}{2} < -1$). Следи $f(b) = \max\{|g(-1), g(1)|\} = \max\left\{|b|, \left|b + \dfrac{3}{2}\right|\right\} \geqslant \dfrac{3}{4}$. Како је $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$, следи $\min\limits_{b\in\mathbb{R}} f(b) = \dfrac{3}{4}$.

3. Нека је $\mathfrak{I}(A,B) = \dfrac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$. Применом операција $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ вредност $\mathfrak{I}$ се не мења, тј. применом ових операција могуће добити само парове (C,D) за које је $\mathfrak{I}(C,D) = \mathfrak{I}(A,B)$. Са друге стране, ако су $C = (c_1, \ldots, c_m)$ и $D = (d_1, \ldots, d_n)$ такви да је $\mathfrak{I}(C,D) = \mathfrak{I}(A,B)$, узастопном применом операције 3° на c_1, d_j и $z = \frac{b_j}{d_j}$ (за свако $j \in \{1, \ldots, n\}$, редом), а након тога узастопном применом операције 1° на c_1, c_j и $z = \frac{c_j}{a_j}$ (за свако $j \in \{2, \ldots, n\}$, редом) се долази до $C' = (c'_1, \ldots, c'_m)$ и $D' = (d'_1, \ldots, d'_n)$ таквих да важи $c'_i = a_i$ за $j \in \{2, \ldots, n\}$ и $d'_i = b_i$ за $j \in \{1, \ldots, n\}$; међутим, због $\mathfrak{I}(C', D') = \mathfrak{I}(C,D) = \mathfrak{I}(A,B)$ мора бити и $c'_1 = a_1$.

Дакле, од (A,B) се може добити $(\overline{A}, \overline{B})$ ако и само ако је $\dfrac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \in \mathbb{R}$.

4. Функције $f(x) = x^2 + kx + k - 1$ (за $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$), $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ и $f(x) = x^2 + 4x + 4$ задовољавају услове задатка, па је $p(n) \geqslant n + 1 > n$.

$p(4) = 5 < 4^2$, $p(5) = 6 < 5^2$, $p(6) = 10 < 6^2$, па за $n \in \{4, 5, 6\}$ важи и друга неједнакост. Ако $f(x) = a(x + x_1)(x + x_2)$ има тражена својства, бројеви a, $a(x_1 + x_2)$ и ax_1x_2 су из $\{1, 2, \ldots, n\}$, па је $x_2 \leqslant \dfrac{n}{ax_1}$, одакле је

$$p(n) \leqslant \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{n}{ax_1} = n \sum_{x_1=1}^{n} \frac{1}{x_1} \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Дакле, довољно је доказати да је $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$ за $n \geqslant 7$; доказ индукцијом; за $n=7$ је $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=2+\frac{9}{20}+\frac{3}{21}<2+\frac{9}{20}+\frac{3}{20}=2,6<\sqrt{7}$. Нека је тврђење тачно за n; важи $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}$, па је довољно доказати да је

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}\leqslant\sqrt{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &\Leftarrow \quad \frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\Leftrightarrow 2\leqslant\sqrt{n+1}\Leftrightarrow n\geqslant 5.\end{aligned}$$

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је x први, а y други број. Тада је $x+y=c$ и треба одредити највећу вредност израза x^3y^2 при услову $x,y>0, x+y=c$, односно треба одредити највећу вредност функције $f(x)=x^3(c-x)^2$, $x\in(0,c)$. f је диференцијабилна функција. Како је $f'(x)=3x^2(c-x)^2+x^3\cdot 2(c-x)\cdot(-1)=x^2(c-x)(3c-5x)$, следи да је $f'(x)>0$ за $x\in\left(0,\frac{3}{5}\cdot c\right)$ и $f'(x)<0$ за $x\in\left(\frac{3}{5}\cdot c,c\right)$, па се максимум ове функције достиже за $x=\frac{3}{5}\cdot c$ и износи $f\left(\frac{3}{5}\cdot c\right)=\frac{3^3\cdot 2^2}{5^5}\cdot c^5$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 3).

2. Видети решење другог задатка за трећи разред Б категорије.

3. Нека је $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{27}}, \beta=\arcsin\sqrt{\frac{3}{28}}$. Како је $\frac{1}{\sqrt{27}}, \sqrt{\frac{3}{28}}>0$, α и β су оштри углови и важи $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3\sqrt{3}}, \sin\beta=\sqrt{\frac{3}{28}}$. Следи $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{\frac{25}{28}}=\frac{5}{\sqrt{28}}$ (β је оштар угао), одакле је $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{3}}{5}$, па важи

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{5}}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Како је $\alpha+\beta\in(0,\pi)$, следи $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ (једини угао из $(0,\pi)$ чији је тангенс једнак $\frac{1}{\sqrt{3}}$ је $\frac{\pi}{6}$), па је $\frac{\pi}{\alpha+\beta}=6\in\mathbb{N}$.

4. **(а)** Нека комплексном броју z одговара тачка T_z (за $z\in\{a,b,z_1,z_2,z_1+z_2,0\}$). За $a,b\in\mathbb{C}$ израз $|a-b|$ једнак је дужини дужи T_aT_b, па из $|(z_1+z_2)-0|=|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ следи $|T_{z_1+z_2}T_0|=|T_{z_1}T_{z_2}|$. Дакле, четвороугао $T_0T_{z_1}T_{z_1+z_2}T_{z_2}$ је паралелограм коме су дијагонале једнаких дужина, односно правоугаоник, па је $\triangle T_{z_1}T_0T_{z_2}$ правоугли.

(б) Ако је $z_1=1, z_2=1+i$, тада је $\triangle T_{z_1}T_0T_{z_2}$ правоугли ($\sphericalangle T_0T_{z_1}T_{z_2}=90^\circ$) и $|z_1+z_2|=\sqrt{5}\neq 1=|z_1-z_2|$, тј. не мора бити $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$.

Друго решење. (дела (а)) Како је $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$, из $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ и $z_1z_2\neq 0$ следи $z_1\overline{z_2}=-\overline{z_1}z_2\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=-\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, тј. број $\frac{z_1}{z_2}$ је чисто имагинаран, што значи да вектори који одговарају бројевима z_1 и z_2 заклапају прав угао.

5. На основу таблице следи да сваки студент има бар један заједнички одговор $\top-\perp$ са неким другим студентом. Стога ако неки студент има свих 5 тачних одговора, онда сваки студент има бар 1 тачан одговор. Како студенти имају различит број тачних одговора, следи да је укупан број тачних одговора $5+4+3+2+1=15$. Из таблице следи да је максималан број тачних одговора $2+2+4+4+3=15$ (на прво питање a или b, на друго a или b, на треће $\top$, на четврто $\top$ и на пето $\top$). Због $\top-\perp$ питања следи би све тачне одговоре имао Аца, али би тада Беба и Гоца имали по два тачна одговора, а Весна и Доки по три, што противречи услову задатка да сви студенти имају различит број тачних одговора. Дакле, не постоји студент који има све тачне одговоре.

Укупан број тачних одговора је $4+3+2+1+0=10$. Уколико би тачни одговори на 3. и 4. питање били $\perp$ и $\perp$, онда би максималан број тачних одговора био $2+2+1+1+3=9<10$, што није могуће. Уколико би тачни одговори на 3. и 4. питање били $\top$ и $\top$, онда би минималан број тачних одговора био $1+1+4+4+2 = 12 > 10$, што није могуће.

Напомена. Под условима задатка, могуће је одредити шта је тачан одговор на свако од пет питања, тј. у потпуности одредити шта се догодило. Заиста, из претходног следи да Аца, Весна и Гоца (који су на на 3. и 4. питање одговорили са $\top$ и $\top$) не могу бити студент који има све нетачне одговоре, па је тај студент Беба или Доки.

Ако Беба нема тачног одговора онда су тачни одговори на $\top$–$\perp$ питања: 3. $\perp$ (јавља се 1 пут), на 4. $\top$ (јавља се 4 пута) и на 5. $\perp$ (јавља се 2 пута). Тада Весна, Гоца и Доки имају бар 2 тачна одговора, па Аца има тачан 1 одговор и то ће бити 4. $\top$. Како су и Ацина и Бебина питања са вишеструким одговором нетачна, следи да су одговори на прва два питања: 1. c (јавља се 1 пут) и 2. c (јавља се 1 пут). Међутим, тада је укупан број тачних одговора $1+1+1+4+2 = 9$, а не 10, па Беба није студент који има све нетачне одговоре, него Доки.

Како Доки нема тачног одговора, тачни одговори на $\top$–$\perp$ питања су: 3. $\top$ (јавља се 4 пута), на 4. $\perp$ (јавља се 1 пут) и на 5. $\perp$ (јавља се 2 пута). Тада Беба, Весна и Гоца имају бар 2 тачна одговора, па Аца има тачан 1 одговор и то 3. $\top$. Како су и Ацина и Докијева питања са вишеструким одговором нетачна, одговори на прва два питања су: 1. b (јавља се 2 пута) и 2. b (јавља се 2 пута) или c (јавља се 1 пут). Како је укупан број тачних одговора $10 = 2+1+4+1+2$, следи да је тачан одговор 2. c.

Дакле, тачни одговори су: 1. b, 2. c, 3. $\top$, 4. $\perp$ и 5. $\perp$ (они су у таблици уоквирени–у последњој колони је укупан број тачних одговора сваког од студената).

	I	II	III	IV	V	
Аца	a	a	$\boxed{\top}$	$\top$	$\top$	1
Беба	$\boxed{b}$	b	$\boxed{\top}$	$\boxed{\perp}$	$\top$	3
Весна	a	b	$\boxed{\top}$	$\top$	$\boxed{\perp}$	2
Гоца	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{\top}$	$\top$	$\boxed{\perp}$	4
Доки	c	a	$\perp$	$\top$	$\top$	0