Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Означимо са H ортоцентар троугла, са O центар описаног круга, са A' и C' подножја нормала из A и C на наспрамне странице BC и AB и са A_1 и B_1 средишта страница BC и AC. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Покажимо прво да је α оштар. Претпоставимо супротно.

1° Уколико би α био прав, тада би теме A истовремено било и ортоцентар, па би то било и пресек Ојлерове праве и странице AC (тј. $A \equiv H \equiv M$), што је немогуће јер M припада унутрашњости странице.

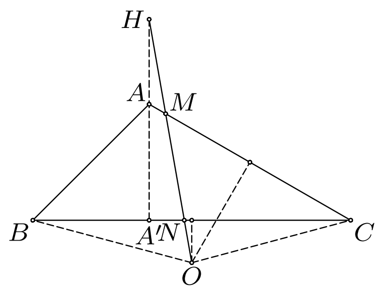
2° Уколико је α туп, тада је тачка H ван троугла $\triangle ABC$ (тј. имамо распоред тачака $A' - A - H$) и како Ојлерова права OH сече унутрашњости страница AC и BC имамо распоред тачака $A' - N - C$, те је угао $\sphericalangle A'NH$ оштар, тј. угао $\sphericalangle CNH = \sphericalangle CNM$ је туп. Али то повлачи да је $CM > CN$ (јер је наспрам већег угла у троуглу $\triangle CNM$ већа страница), што је у супротности са условом задатка да је $CN = CM$.

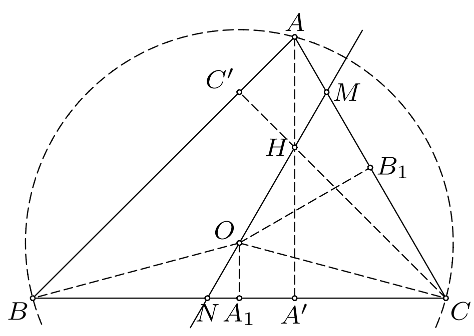
Тиме смо добили контрадикцију у оба случаја, те је угао α оштар. Аналогно се показује да и углови β и γ морају бити оштри, те је $\triangle ABC$ оштроугли и његовој унутрашњости се налази ортоцентар H.

Сада из правоуглог троугла $\triangle ACC'$ добијамо $\sphericalangle ACC' = 90^\circ - \alpha$. Како је $\sphericalangle CAB$ периферијски угао над луком BC добијамо да је $\sphericalangle COA_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sphericalangle CAB = \alpha$, а одатле је $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCA_1 = 90^\circ - \alpha$. Стога важи $\sphericalangle HCA = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCB$.
Из једнакокраког троугла $\triangle CNM$ имамо

$$CN = CM \;\Rightarrow\; \sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM.$$

Одатле следи подударност $\triangle HMC \cong \triangle ONC$ (усу: $\sphericalangle MCH = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle NCO$, $CM = CN$, $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM$), односно $HC = OC$. Сада имамо да је $\triangle HA'C \cong \triangle OB_1C$ (суу: $HC = OC$, $\sphericalangle HCA' = \sphericalangle HCO + 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCH + 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCB_1$, $\sphericalangle HA'C = 90^\circ = \sphericalangle OB_1C$) из чега следи $CA' = CB_1$. Но како је $\triangle AA'C$ правоугли, а B_1 средиште хипотенузе (и центар описаног круга) те је $CB_1 = B_1A'$, дакле $\triangle A'CB_1$ је једнакостраничан, значи $\sphericalangle B_1CA' = \sphericalangle ACB = 60^\circ$.

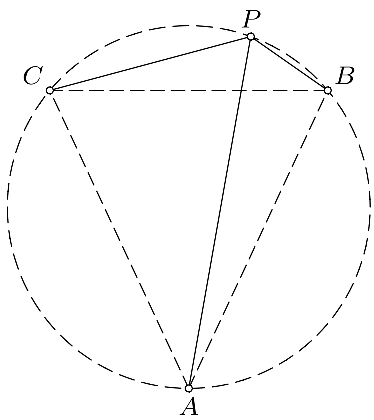




Напомена: ученицима који нису разматрали случајеве за вредност угла α одузети 3 поена!

2. Претпоставимо да се тачка P налази на унутрашњости лука BC (који не садржи A). Тада је $PB + PC \geqslant BC$, док је PA веће или једнако мањој од две странице BA, CA: бар један од углова $\sphericalangle PBA$ и $\sphericalangle PCA$ није оштар, без умањења општости можемо узети да је то $\sphericalangle PBA$, и тада је PA највећа страница у $\triangle PBA$ (наспрам већег угла иде већа страница), тј. $PA > BA$. Према томе, збир $PA + PB + PC$ није мањи од збира неке две странице.

С друге стране, ако се P поклапа са теменом највећег угла троугла $\triangle ABC$, онда је $PA + PB + PC$ једнако збиру две најмање странице. Следи да је тражена тачка P теме највећег угла (односно, једно од темена, ако је таквих више за случај једнакокраког или једнакостраничног троугла). На основу претходног видимо да је посматрани збир строго већи за сваки други положај тачке P.



3. Докажимо да су бројеви x и y дељиви са 30, одакле ће следити тражено тврђење. Како $9 \mid x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$ имамо $3 \mid (x - y)^2$, односно $3 \mid x - y$. Зато $3 \mid xy$, те како и $3 \mid x - y$, добијамо да $3 \mid x$ и $3 \mid y$. Пошто $10 \mid x^2 + xy + y^2 \mid x^3 - y^3$, то се бројеви x^3 и y^3 завршавају истом цифром, што је могуће само ако се и бројеви x и y завршавају истом цифром (ово треба проверити!). Отуда је $0 \equiv_{10} x^2 + xy + y^2 \equiv_{10} 3x^2$, па $10 \mid x$ и $10 \mid y$. Овим смо доказали да $30 \mid x$ и $30 \mid y$, те $900 \mid xy$.

4. *Решење 1:* Из једнакости $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 18+2\cdot 9 = 36$, налазимо да је $|x+y+z| = 6$. Докажимо да су бројеви x, y и z истог знака, одакле ће следити да је $|x| + |y| + |z| = 6$. Како је $0 = 18-2\cdot 9 = x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx) = (x+y-z)^2-4xy$, то је $xy \geqslant 0$. Аналогно претходном добија се и $yz \geqslant 0$ и $zx \geqslant 0$. Из чињеница да је $xy \geqslant 0$, $yz \geqslant 0$ и $zx \geqslant 0$ закључујемо да су бројеви x, y и z истог знака (нулу можемо сматрати бројем са произвољним знаком), па је $|x| + |y| + |z| = 6$.

Решење 2: Из једнакости $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 18+2\cdot 9 = 36$, налазимо да је $|x+y+z| = 6$. Сада разликујемо следећа два случаја:

1° $x+y+z=6$. Доказаћемо да су x, y и z ненегативни бројеви, одакле ће следити да је $|x|+|y|+|z| = 6$. Уколико би тачно један од бројева x, y и z био негативан, рецимо z, онда би имали да је $x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2} > \frac{6^2}{2} = 18$, што је немогуће. Ако би пак тачно два од бројева x, y и z били негативни, рецимо y и z, онда би било $x > 6$ и не би могло да важи $x^2+y^2+z^2 = 18$. Овим смо доказали да су бројеви x, y и z ненегативни (јасно је да због $x+y+z=6$, не могу сва три да буду негативна).

2° $x+y+z = -6$. Нека је $x' = -x$, $y' = -y$ и $z' = -z$. Тада је $x'+y'+z' = 6$ и за бројеве x', y' и z' важи $x'^2+y'^2+z'^2 = 18$ и $x'y'+y'z'+z'x' = 9$, па из првог случаја закључујемо да је $|x'|+|y'|+|z'| = 6$. Зато је $|x|+|y|+|z| = |x'|+|y'|+|z'| = 6$.

На овај начин смо доказали да је под датим условима вредност израза $|x|+|y|+|z|$ једнака 6.

5. Ако је Ана записала све различите бројеве, она је записала 8 бројева из скупа $\{0,1,2,\ldots,7,8\}$. Значи сви Бранкови бројеви би морали бити међусобно једнаки (означимо их са b). Како и збир свих Аниних бројева и збир свих Бранкових бројева представља укупан број жетона на табли то су они међусобно једнаки, тј. $(\sum_{k=0}^{9} k) - b = 8\cdot b$, одакле налазимо да мора бити $b=4$. Сада још остаје да конструишемо пример:

Б	4	4	4	4	4	4	4	4	
									0
								○	1
							○	○	2
						○	○	○	3
	○	○	○	○	○				5
	○	○	○	○	○	○			6
	○	○	○	○	○	○	○		7
	○	○	○	○	○	○	○	○	8
									А

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

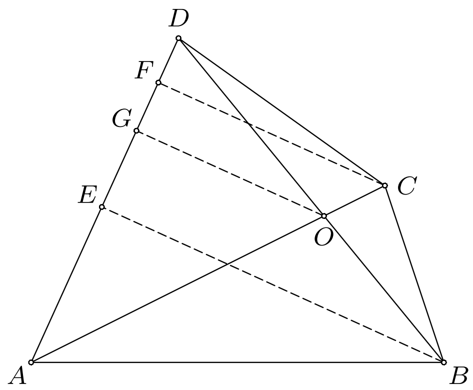
1. Означимо са S_1, S_2, S_3 и S_4 редом површине троуглова AOB, BOC, COD и DOA. Означимо са p, q и r следеће површине: $p = S_{\triangle ABD} = S_1 + S_4 = \frac{1}{2}BE \cdot AD$, $q = S_{\triangle ACD} = S_3 + S_4 = \frac{1}{2}CF \cdot AD$, $r = S_4 = \frac{1}{2}OG \cdot AD$. Како је $S_2 = \dfrac{S_1 S_3}{S_4}$ из претходних релација можемо изразити S_j преко p, q и r:

$$S_1 = p - r, \qquad S_3 = q - r, \qquad S_4 = r, \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{(p-r)(q-r)}{r}.$$

Сада добијамо да је површина четвороугла $ABCD$ једнака

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = p - r + \frac{(p-r)(q-r)}{r} + q - r + r = \frac{pq}{r}$$

одакле следи тврђење задатка: $S_{ABCD} = \dfrac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}$.



2. Сва три корена су дефинисана када је $x \geqslant \frac{1}{2}$ (први за $x \geqslant \frac{1}{2}$, други $x \geqslant 6$ и трећи $x \geqslant 2$). Трансформишимо дату неједначину на облик

$$(1)\ \sqrt{2x-1} - 3 \geqslant \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} > 0,$$

јер је $x+6 > x+2$. Да би ова неједначина имала решења потребно је и да лева страна буде позитивна, тј. $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$, што нам даје $x > 5$. Како су обе стране неједначине (1) позитивне, можемо је квадрирати, те добијамо

$$\sqrt{(x+2)(x+6)} \geqslant 3\sqrt{2x-1}.$$

Како су и у овој неједначини обе стране позитивне опет можемо квадрирати те добијамо квадратну неједначину $x^2 - 10x + 21 \geqslant 0$. Њено решење је $x \in (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$, што са свим претходним условима даје коначно решење $x \in [7, +\infty)$.

3. Нека је $S(x,y)=x^2+y^2+12x-16y$. Како је

$$S(x,y)=2(x+3)^2+2(y-4)^2-(x^2+y^2)-50\geqslant -75,$$

то је најмања вредност датог израза једнака -75 и достиже се за $x=-3$ и $y=4$.

Из неједнакости $S(x,y)+S(-x,-y)=2(x^2+y^2)\leqslant 50$, а на основу тога што је $S(-x,-y)\geqslant -75$, налазимо да важи

$$S(x,y)\leqslant 50-S(-x,-y)\leqslant 50-(-75)=125.$$

Отуда је највећа вредност датог израза једнака 125 и достиже се за $x=3$ и $y=-4$.

4. Ови бројеви су једнаки јер је $\log 2^{\sqrt{\log_2 2004}}=\sqrt{\log_2 2004}\cdot\log 2=\dfrac{\sqrt{\log 2004}}{\sqrt{\log 2}}\cdot\log 2=\sqrt{\log 2004\cdot\log 2}$ и $\log 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}=\sqrt{\log_{2004} 2}\cdot\log 2004=\dfrac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2004}}\cdot\log 2004=\sqrt{\log 2\cdot\log 2004}$.

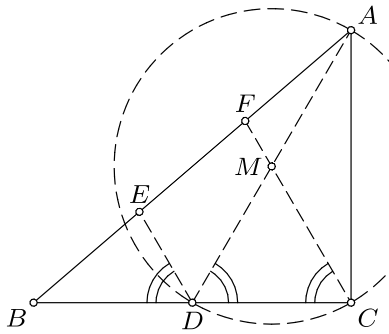
5. Доказаћемо општије тврђење да за свако k постоје индекси i и j такви да је испуњена једнакост $x_i-x_j=k$.
Претпоставимо супротно и поделимо скуп $\{1,2,3,\ldots,2k-1,2k\}$ у k парова бројева $\{(1,k+1),(2,k+2),\ldots,(k,2k)\}$. Тада се у сваком пару налази највише један члан низа $\{x_n\}$, па се у скупу $\{1,2,3,\ldots,2k-1,2k\}$ налази највише k бројева из низа. Ово је контрадикција са чињеницом да је $x_{k+1}\leqslant 2k$.
Тиме смо показали да за свако $k\in\mathbb{N}$ (па и $k=2005$) постоје индекси i и j такви да је испуњена једнакост $x_i-x_j=k$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Нека је F средиште дужи AE. Тада је $BE = EF = FA$. Како је и $BD = DC$, праве ED и FC су паралелне, па по Талесовој теореми CF полови AD. Означимо са M средиште AD. Из услова задатка је $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC$, па добијамо да је троугао $\triangle MCD$ једнакокрак, тј. $MC = MD = MA$. Дакле, C је на полукругу над пречником AD, тј. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 90^\circ$.



2. Претпоставимо да су k и l природни бројеви такви да је $ab+1 = (ka+1)^2$ и $ac+1 = (la+1)^2$. Тада је $b = k(ka+2)$ и $c = l(la+2)$, па је $bc+1 = (kla)^2 + 2kl(k+l)a + 4kl + 1 = (kla+k+l)^2 + 1 - (k-l)^2$. Ако ставимо $l = k+1$, тада је $bc+1$ потпун квадрат. Према томе,

$$(b, c) = \big(k(ka+2), (k+1)((k+1)a+2)\big)$$

задовољава услов задатка за сваки природан број k.

3. Из синусне теореме је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin C$, па је дата неједнакост еквивалентна са $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta \leqslant \sin\gamma$, тј. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leqslant 2\sin\gamma$. Међутим,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)\\ &= 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) \leqslant 2\sin\gamma.\end{aligned}$$

Једнакост важи када је $\cos(\alpha-\beta) = 1$, односно за једнакокраки троугао, код кога је $\alpha = \beta$.

4. Означимо дати израз са I. Тада је $I = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2)$.

Користимо неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског и добијамо: $(1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2+x_n^2)\geqslant 1\cdot(x_1-x_2)+2\cdot(x_2-x_3)+3\cdot(x_3-x_4)+\ldots+(n-1)\cdot(x_{n-1}-x_n)+n\cdot x_n = x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$, те је минимална вредност израза I једнака

$$I_{\min} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2} = \frac{3}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Остаје да нађемо за које x_i се она добија. Знак једнакости у неједнакости К-Ш-Б важи када су одговарајући елементи пропорционални, тј. кад је

$$\frac{x_1-x_2}{1} = \frac{x_2-x_3}{2} = \frac{x_3-x_4}{3} = \ldots = \frac{x_{n-1}-x_n}{n-1} = \frac{x_n}{n} = \alpha.$$

Одавде налазимо

$$x_n = n\alpha, x_{n-1}-x_n = (n-1)\alpha, \ldots, x_{k-1}-x_k = (k-1)\alpha, \ldots, x_1-x_2 = 1\cdot\alpha.$$

Сабирањем првих $(n+1-k)$ једначина добијамо $x_k = [n+(n-1)+\ldots+k]\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k-1} i\right]\alpha = \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right]\alpha$.

Сада α добијамо из једнакости

$$1 = x_1+x_2+\ldots+x_n = \left[n\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\right]\alpha$$

$= \left[\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}\right]\alpha$, одакле је:

$\alpha = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$. Коначно имамо

$$x_k = 3\cdot\left[\frac{n(n+1)-(k-1)k}{n(n+1)(2n+1)}\right] = \frac{6\sum_{j=k}^{n} j}{n(n+1)(2n+1)}.$$

<u>Напомена:</u> ученицима који нису разматрали када важи једнакост (тј. када се достиже минимум) одузети 5 поена!

5. За тупоугли троугао одређен датим тачкама то је круг над највећом страницом као пречником (не може мањи, а тај круг прекрива цео троугао). Ово је случај и за правоугли троугао.

Код оштроуглог троугла тражени круг је круг описан око тог троугла.

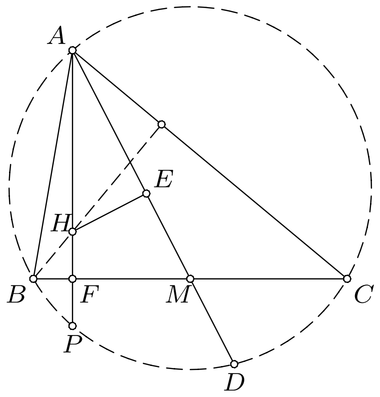
Ако су те три тачке колинеарне, нпр. $A-B-C$, онда је то круг над AC као пречником.

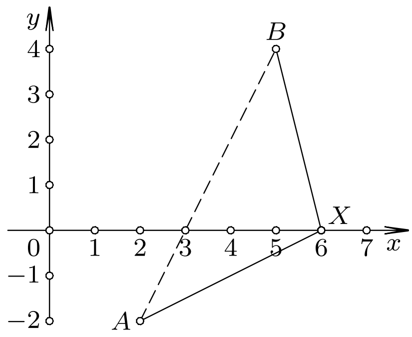
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – А категорија

1. Нека је F подножје нормале из A на BC и нека је P пресек AH са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Довољно је доказати да је четвороугао тетиван, због $\sphericalangle HEM + \sphericalangle HFM = 180°$. Показаћемо да је $AE \cdot AM = AH \cdot AF$, одакле следи да су тачке H, E, F, M коцикличне.
$AE \cdot AM = (AM - MD) \cdot AM = (AM - ME) \cdot AM = AM^2 - MD \cdot AM$, где смо користили да је $ME = MD$ (из услова задатка). Даље, због потенције тачака M и F у односу на круг описан око $\triangle ABC$ и Питагорине теореме примењене на правоугли троугао $\triangle AMF$ добијамо: $AE \cdot AM = AM^2 - MB \cdot MC = AF^2 + FM^2 - MB^2 = AF^2 + (FM - MB) \cdot (FM + MB) = AF^2 - BF \cdot FC = AF^2 - AF \cdot FP = AF \cdot (AF - FP) = AF \cdot AH$, због познате чињенице да је $HF = FP$, јер су троуглови $\triangle BCH$ и $\triangle BCP$ подударни са заједничком страницом и једнаким угловима.





2. *Решење 1:* Функцију f можемо представити у облику

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2 + 4^2}.$$

Тада видимо да функција f представља збир растојања од тачака $A(2, -2)$ и $B(5, 4)$ до тачке $X(x, 0)$. Ово растојање је минимално када тачка X припада дужи AB (због неједнакости троугла) и то је испуњено за $x = 3$. Минимум функције је $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.
Решење 2: Како је

$$f'(x) = \frac{(x-5)\sqrt{x^2-4x+8} + (x-2)\sqrt{x^2-10x+41}}{\sqrt{x^2-4x+8} \cdot \sqrt{x^2-10x+41}}$$

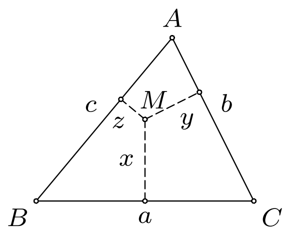
$f'(x) = 0$ кад је $(x-2)\sqrt{x^2-10x+41} = (5-x)\sqrt{x^2-4x+8}$. Обе стране претходне неједнакости су истог знака само уколико је

$x \in (2,5)$! Тек сада смемо да квадрирамо претходну једнакост. Након сређивања добијамо $12 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$ и њена решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$ (али ово отпада јер $x_2 \notin (2,5)$). Испитивањем знака квадратне једначине добијамо да је $f'(x) < 0$ за $x \in (2,3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3,5)$, што са $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 2]$ и $f'(x) > 0$ за $x \in [5, +\infty)$, коначно даје $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3, +\infty)$. Стога за $x = 3$ имамо минимум и $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.

3. <u>Решење 1:</u> Све операције радимо по модулу 1000. $3^{2005} \equiv 3 \cdot 3^{2004} = 3 \cdot (10-1)^{1002} = 3 \cdot (\binom{1002}{0} 10^{1002}(-1)^0 + \ldots + \binom{1002}{999} 10^3 (-1)^{999} + \binom{1002}{1000} 10^2 (-1)^{1000} + \binom{1002}{1001} 10^1 (-1)^{1001} + \binom{1002}{1002} 10^0 (-1)^{1002}) \equiv$
$3 \cdot (\binom{1002}{1000} 10^2 (-1)^{1000} + \binom{1002}{1001} 10^1 (-1)^{1001} + \binom{1002}{1002} 10^0 (-1)^{1002}) =$
$3 \cdot (\frac{1002 \cdot 1001}{2} \cdot 100 - 1002 \cdot 10 + 1) \equiv 3 \cdot (100 - 20 + 1) = 243.$

<u>Решење 2:</u> Према Ојлеровој теореми имамо да је
$$3^{\varphi(1000)} = 3^{400} \equiv 1 \pmod{1000},$$
те је $3^{2005} = \left(3^{400}\right)^5 \cdot 3^5 \equiv 1^5 \cdot 3^5 = 243 \pmod{1000}$.

4. Нека су дужине страница троугла редом a, b и c, а растојања произвољне тачке троугла до правих које садрже те странице редом x, y и z.



Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског је
$$ax + by + cz \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
па је $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geqslant \dfrac{2P}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, тј. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, где је P површина троугла ABC.

Једнакост важи акко $a : b : c = x : y : z$. Конструишимо тачку M унутар троугла ABC која задовољава овај услов. Нека је N тачка угла $\sphericalangle ACB$ удаљена a од BC и b од AC. Свака тачка K полуправе CN задовољава очигледно $x(K) : y(K) = a : b$. Обратно, тачка K овог угла која ово задовољава припада полуправој CN. У супротном права кроз K паралелна BC секла би CN у L, па из $x(L) = x(K)$ следи $y(L) = y(K)$ и одатле контрадикција $BC \parallel AC$. Дакле полуправа CN је скуп тачака угла $\sphericalangle ACB$ за који важи $x : y = a : b$. Слично, скуп тачака угла $\sphericalangle CAB$ за које је $y : z = b : c$ је полуправа с врхом A. Те две полуправе секу се у тачки M унутар трогла, за коју је $x : z = \dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z} = \dfrac{a}{b}\dfrac{b}{c} = a : c$. Тачка M зато задовољава услов, те је она тражена тачка за коју је збир квадрата растојања до правих које садрже странице троугла $\triangle ABC$ минималан.

5. Могуће је.

Првих неколико бројева ставимо у A (први скуп), наредних неколико у B (други), па опет неколико у A итд. Пустимо да број узастопних природних бројева у тим скуповима неограничено расте.

Један могући пример је:

$$A = \{n \mid (2k)^2 < n \leqslant (2k+1)^2, k \in \mathbb{N}_0\}$$

$$B = \{n \mid (2k+1)^2 < n \leqslant (2k+2)^2, k \in \mathbb{N}_0\},$$

односно $A = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, \dots\}$, $B = \{2, 3, 4, 10, 11, \dots\}$.

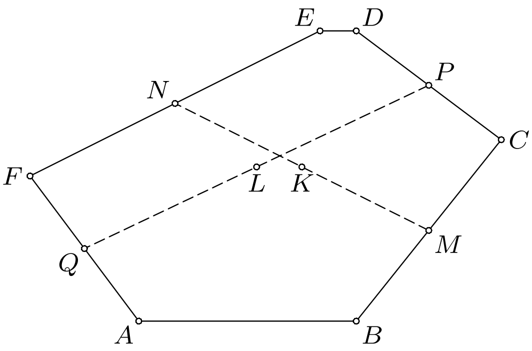
Тада не може бити ни једне аритметичке прогресије. Претпоставимо супротно да нпр. A садржи бесконачну аритметичку прогресију $\{a_i\}$ са разликом чланова d и првим чланом a_1. Али тада постоји $j \in \mathbb{N}$, такав да за број $a_j = a_1 + (j-1)d$ важи $(2d+1)^2 < a_j \leqslant (2d+2)^2$ (међу овх $2d+3$ узастопних природних бројева постоји број који даје исти остатак при дељењу са d као и a_1), односно важи $a_j \in B$, што је у супротности са претпоставком да су сви чланови аритметичке прогресије $\{a_i\}$ у A.

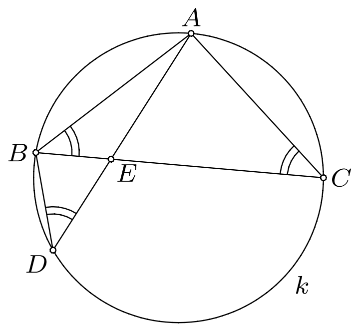
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Нека је O произвољна тачка. Тада је $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})\big) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ и слично $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA})$, па је $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}$ ако и само ако је $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$, тј. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}$, односно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, што је и требало доказати.





2. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$, то су у троугловима $\triangle ABE$ и $\triangle ABD$ два угла једнака одговарајућим угловима, па и за трећи пар углова $\sphericalangle BEA$ и $\sphericalangle ABD$ важи да су једнаки.

3. Докажимо да су бројеви x и y дељиви са 30, одакле ће следити тражено тврђење. Како $9 \mid x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy$ имамо $3 \mid (x-y)^2$, односно $3 \mid x - y$. Зато $3 \mid xy$, те како и $3 \mid x - y$, добијамо да $3 \mid x$ и $3 \mid y$. Пошто $10 \mid x^2 + xy + y^2 \mid x^3 - y^3$, то се бројеви x^3 и y^3 завршавају истом цифром, што је могуће само ако се и бројеви x и y завршавају истом цифром (ово треба проверити!). Отуда је $0 \equiv_{10} x^2 + xy + y^2 \equiv_{10} 3x^2$, па $10 \mid x$ и $10 \mid y$. Овим смо доказали да $30 \mid x$ и $30 \mid y$, те $900 \mid xy$.

4. Означимо $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \alpha \in \mathbb{Q}$. Одавде је $\sqrt{a} - \alpha\sqrt{b} = \alpha\sqrt{3} - \sqrt{2}$, па се квадрирањем добија $a + \alpha^2 b - 2\alpha\sqrt{ab} = 3\alpha^2 - 2 - 2\alpha\sqrt{6}$, тј. $\sqrt{ab} = \beta + \sqrt{6}$, где је $\beta \in \mathbb{Q}$. Након још једног квадрирања имамо $ab = \beta^2 + 6 + 2\beta\sqrt{6}$, па је $\beta = 0$ и $ab = 6$. Постоје 4 могућности.

1° $a = 1, b = 6$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \notin \mathbb{Q}$;

2° $a = 2, b = 3$: $\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \notin \mathbb{Q}$;

3° $a = 3, b = 2$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$;

4° $a = 6, b = 1$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Дакле, $a = 3$ и $b = 2$.

5. Ако је Ана записала све различите бројеве, она је записала 8 бројева из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$. Значи сви Бранкови бројеви би морали бити међусобно једнаки (означимо их са b). Како и збир свих Аниних бројева и збир свих Бранкових бројева представља укупан број жетона на табли то су они међусобно једнаки, тј. $(\sum_{k=0}^{9} k) - b = 8 \cdot b$, одакле налазимо да мора бити $b = 4$. Сада још остаје да конструишемо пример:

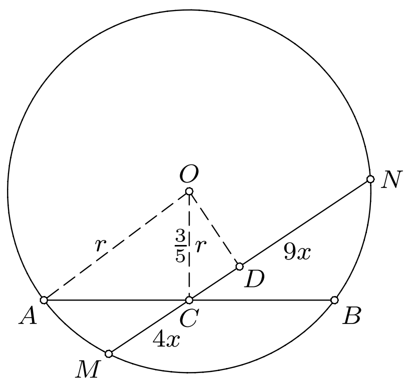
Б	4	4	4	4	4	4	4	4	
									0
								○	1
							○	○	2
						○	○	○	3
	○	○	○	○	○				5
	○	○	○	○	○	○			6
	○	○	○	○	○	○	○		7
	○	○	○	○	○	○	○	○	8
									А

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Из троугла $\triangle AOC$, помоћу Питагорине теореме, добијамо да је $AC = \dfrac{4}{5}r$, а из сличности троуглова $\triangle ACM$ и $\triangle NCB$ имамо $AC \cdot CB = MC \cdot CN$, тј. $\dfrac{16}{25}r^2 = 36x^2$, па је $x = \dfrac{2}{15}r$. Нека је D средиште тетиве MN. Како је $MD = \dfrac{13}{2}x$, то је $CD = MD - MC = \dfrac{5}{2}x = \dfrac{r}{3}$. Коначно, налазимо $\sin\sphericalangle ACM = \cos\sphericalangle OCD = \dfrac{r}{3} : \dfrac{3r}{5} = \dfrac{5}{9}$.



2. Сва три корена су дефинисана када је $x \geqslant \frac{1}{2}$ (први за $x \geqslant \frac{1}{2}$, други $x \geqslant 6$ и трећи $x \geqslant 2$). Како је $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} > 0$ (јер је $x+6 > x+2$), да би ова неједначина имала решења потребно је и да лева страна буде позитивна, тј. $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$, што нам даје $x > 5$. Сада, како имамо да су обе стране полазне једначине позитивне, можемо је квадрирати, те добијамо $\sqrt{(x+2)(x+6)} = 3\sqrt{2x-1}$. Како су и у овој једначини обе стране позитивне опет можемо квадрирати те добијамо квадратну једначину $x^2 - 10x + 21 = 0$. Њена решења су $x = 3$ и $x = 7$, што са свим претходним условима даје само једно решење $x = 7$.

3. *Решење 1*: Дату једначину ћемо решавати као квадратну једначину: $z_{1,2} = \dfrac{3+2i \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4(5+i)}}{2} = \dfrac{3+2i \pm \sqrt{-15+8i}}{2}$. Корен $u = x + iy$ из $-15 + 8i$ ћемо извадити тако што ћемо решавати једначину $(x+iy)^2 = -15 + 8$. Њен имагинарни део је $2xy = 8$, односно $y = \dfrac{4}{x}$, што кад убацимо у њен реални део $x^2 - y^2 = -15$ даје $\dfrac{x^4 + 15x^2 - 16}{x^2} = 0$. Биквадратна једначина $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ се решава сменом $t = x^2$. Решења једначине

$t^2+15t-16=0$ су $t=-16$ (које отпада јер је $x\in\mathbb{R}$, па је $t=x^2\geqslant 0$) и $t=1$, које даје два решења $x_1=1$ (тад је $y_1=4$, па је $u_1=1+4i$) и $x_2=-1$ (тад је $y_2=-4$, па је $u_2=-1-4i$). Одавде добијамо решења дате једначине $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

Решење 2: Исто као и у претходном решењу задатка долазимо до $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$. Трансформишимо поткорени израз: $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{1+2\cdot 1\cdot 4i+(-16)}}{2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{(1+4i)^2}}{2}$, тј. $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm(1+4i)}{2}$, одакле добијамо два решења дате једначине $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

Решење 3: Исто као и у претходна два решења долазимо до $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$. Извадимо корен u из $-15+8i$ стандардним поступком: лако добијамо да је $|-15+8i|=17$, као и $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{8}{15}$ (обратите пажњу да је аргумент φ у II квадранту, па ће $\dfrac{\varphi}{2}$ бити у I квадранту!), али сада морамо да употребимо доста тригонометријских трансформација: $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$ (од знака $\pm$ узимамо $+$ јер је $\dfrac{\varphi}{2}$ у I квадранту), $\cos\varphi=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ (од знака $\pm$ узимамо $-$ јер је φ у II квадранту). Из ове две формуле добијамо да је $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}+1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}-1}}=4$. Сада из чињеница да је $|u|=\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg}\arg u=4$ добијамо да је $u=1+4i$. Када то убацимо у формулу за решења квадратне једначине добијамо $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm(1+4i)}{2}$. Тражена решења дате једначине су: $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

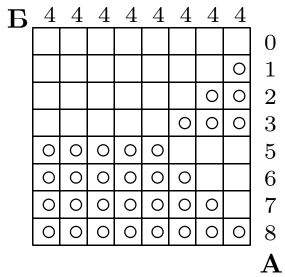
Решење 4: Задатак се може урадити и директном заменом $z=a+ib$. Када заменимо у полазну једначину имагинарни део нам даје $2ab-2a-3b+1=0$, тј. $b=\dfrac{2a-1}{2a-3}$, што кад заменимо у реални део $a^2-b^2-3a+2b+5=0$ добијамо једначину $\dfrac{4a^4-24a^3+69a^2-99a+50}{(2a-3)^2}=0$. Када факторишемо полином $4a^4-24a^3+69a^2-99a+50$ добијамо $(a-1)(a-2)(4a^2-12a+25)$ и како је дискриминантна квадратног тринома $D=-256<0$ имамо да је $4a^2-12a+25>0$ за свако a, те добијамо да су једина решења $a_1=1$ и $a_2=2$, што нам даје решења $z_1=1-i$ и $z_2=2+3i$.

4. Нека је $S(x,y)=x^2+y^2+12x-16y$. Како је

$$S(x,y)=2(x+3)^2+2(y-4)^2-(x^2+y^2)-50\geqslant -75,$$

то је најмања вредност датог израза једнака -75 и достиже се за $x=-3$ и $y=4$.

5. Ако је Ана записала све различите бројеве, она је записала 8 бројева из скупа $\{0,1,2,\ldots,7,8\}$. Значи сви Бранкови бројеви би морали бити међусобно једнаки (означимо их са b). Како и збир свих Аниних бројева и збир свих Бранкових бројева представља укупан број жетона на табли то су они међусобно једнаки, тј. $(\sum\limits_{k=0}^{9} k) - b = 8 \cdot b$, одакле налазимо да мора бити $b = 4$. Сада још остаје да конструишемо пример:



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Квадрирамо све три релације, а затим их саберемо (водећи рачуна да за сваки вектор важи $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$). Добија се
$$3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) < 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}),$$
па би важило $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 < 0$, што је немогуће.

2. Вредности одговарајућих детерминанти су:
$$\Delta = \beta(\alpha - 1),\ \Delta_x = \beta^2(\alpha - 1),\ \Delta_y = \alpha\beta(\alpha - 1) \text{ и } \Delta_z = \beta(\alpha - 1).$$
1° за $\alpha \neq 1, \beta \neq 0$ систем има јединствено решење које је дато са $x = \beta, y = \alpha, z = 1$.
У наредна два случаја су све детерминанте једнаке 0 и онда не знамо да ли ситем има вишеструко решење или нема решења. То морамо установити Гаусовим системом елиминације.

2° за $\beta = 0$ добија се систем
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha^2 + 1 \\ x & + & 3y & & & = & \alpha \end{array},$$
који има вишеструко решење $x = t, y = \alpha - t, z = \alpha t - t + 1,\ t \in \mathbb{R}$.

3° за $\alpha = 1$ добија се систем
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \beta z & = & 1 + 2\beta \\ x & + & y & + & z & = & 2 + \beta \\ x & + & 3y & + & 2\beta z & = & 1 + 3\beta \end{array},$$
који има вишеструко решење $x = t, y = \beta + 1 - t, z = 1,\ t \in \mathbb{R}$.

Напомена: Ми смо у 2° и 3° узели да је x слободна променљива и доделили јој вредност параметра: $x = t,\ t \in \mathbb{R}$. Могуће је и доделити и било којој другој променљивој вредност параметра и тад се добија исто решење, само мало другачије записано.

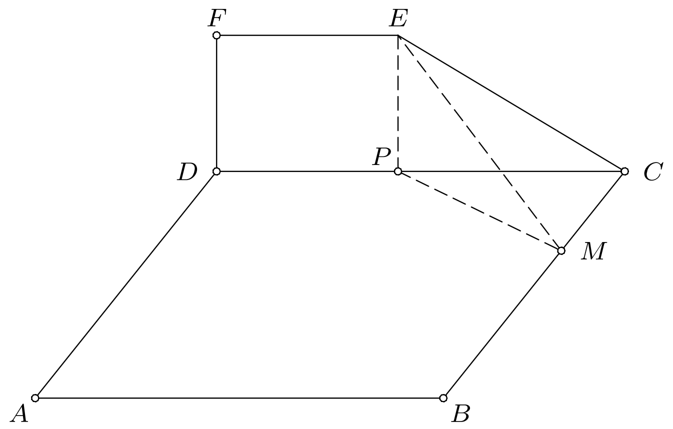
3. Из синусне теореме је $a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin\beta,\ c = 2R\sin C$, па је дата неједнакост еквивалентна са $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta \leqslant \sin\gamma$, тј. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leqslant 2\sin\gamma$. Међутим,
$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) \\ &= 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) \leqslant 2\sin\gamma. \end{aligned}$$
Једнакост важи када је $\cos(\alpha - \beta) = 1$, односно за једнакокраки троугао, код кога је $\alpha = \beta$.

4. Ови бројеви су једнаки јер је $\log 2^{\sqrt{\log_2 2004}} = \sqrt{\log_2 2004} \cdot \log 2 = \dfrac{\sqrt{\log 2004}}{\sqrt{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2004 \cdot \log 2}$ и $\log 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}} = \sqrt{\log_{2004} 2} \cdot \log 2004 = \dfrac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2004}} \cdot \log 2004 = \sqrt{\log 2 \cdot \log 2004}$.

5. Нека је EP висина трапеза и M подножје нормале из тачке P на BC. По Теореми о три нормале важи $EM \perp BC$. Из правоуглих троуглова $\triangle CPM$, $\triangle ECM$ и $\triangle ECP$ добијамо

$$\cos\sphericalangle BCD = \cos\sphericalangle MCP = \frac{CM}{CP} = \frac{CM}{CE}\cdot\frac{CE}{CP} = \frac{\cos\sphericalangle MCE}{\cos\sphericalangle PCE},$$

односно $\cos\sphericalangle BCD = \dfrac{\cos\sphericalangle BCE}{\cos\sphericalangle DCE} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$, јер је $\sin\sphericalangle DCE = \dfrac{DE}{CE} = \dfrac{DF}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $\cos\sphericalangle DCE = \dfrac{1}{2}$. Сада налазимо висину ромба $h = a\cdot\sin\sphericalangle BCD = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$, па је $r = \dfrac{h}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{6}$ и $\dfrac{a}{r} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.



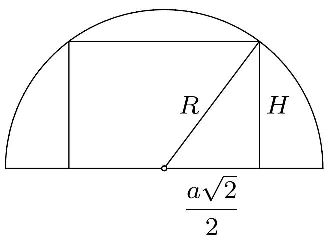
Друштво математичара Србије

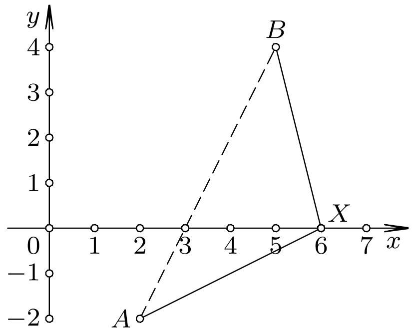
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Остаци при дељењу са 7 бројева 2^n су 1, 2 или 4, а остаци при дељењу са 7 бројева n^2 су 0, 1, 2 или 4. Дакле, број $2^n + n^2$ не може бити дељив са 7.

2. Означимо са H тражену висину призме, а са a страницу основе призме. Ако се постави раван кроз дијагоналу призме нормално на раван основе, у пресеку се добија правоугаоник страница $a\sqrt{2}$ и H уписан у полукруг полупречника R. Тада је $\frac{a^2}{2} = R^2 - H^2$, па је $V = a^2H = 2(R^2H - H^3)$ и $V' = 2(R^2 - 3H^2)$. За $H < \frac{R}{\sqrt{3}}$ биће $V' > 0$, а за $H > \frac{R}{\sqrt{3}}$ биће $V' < 0$, па је запремина призме максимална када је $H = \frac{R}{\sqrt{3}}$.





3. <u>*Решење 1:*</u> Функцију f можемо представити у облику

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2 + 4^2}.$$

Тада видимо да функција f представља збир растојања од тачака $A(2,-2)$ и $B(5,4)$ до тачке $X(x,0)$. Ово растојање је минимално када тачка X припада дужи AB (због неједнакости троугла) и то је испуњено за $x = 3$. Минимум функције је $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.

Решење 2: Како је

$$f'(x) = \frac{(x-5)\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)\sqrt{x^2-10x+41}}{\sqrt{x^2-4x+8}\cdot\sqrt{x^2-10x+41}}$$

$f'(x) = 0$ кад је $(x-2)\sqrt{x^2-10x+41} = (5-x)\sqrt{x^2-4x+8}$. Обе стране претходне неједнакости су истог знака само уколико је $x \in (2,5)$! Тек сада смемо да квадрирамо претходну једнакост. Након сређивања добијамо $12\cdot(x^2-2x-3) = 0$ и њена решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$ (али ово отпада јер $x_2 \notin (2,5)$). Испитивањем знака квадратне једначине добијамо да је $f'(x) < 0$ за $x \in (2,3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3,5)$, што са $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 2]$ и $f'(x) > 0$ за $x \in [5, +\infty)$, коначно даје $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3, +\infty)$. Стога за $x = 3$ имамо минимум и $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.

4. Како је $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{n+1} = \frac{9n+5}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} > 0$, низ је растући.

5. Нека је $z = x+iy$. Из $\left|\dfrac{x+(y-1)i}{x+(y-2)i}\right| = \dfrac{1}{2}$ добијамо $\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-2)^2}$, те након квадрирања $3x^2+3y^2-4y = 0$, односно $x^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Од свих комплексних бројева на овом кругу највећи модуо има број $z_0 = \dfrac{4}{3}i$.