Rešenja JBMO 2007

Rešenje 1. Ostatak pri deljenju broja n sa 3 je jednak ostatku pri deljenju sume cifara sa 3. Dakle, n je kongruentno sa 2 po modulu 3, pa n ne može biti potpun kvadrat.

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = n.$$

Broj n je potpun kvadrat ako i samo ako ima neparan broj delilaca - sledi iz uparivanja odgovarajućih delilaca $n = d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = \cdots = d_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$.

Rešenje 2. Označimo $KC = BL = x$ i $PY = AQ = y$. Uslov zadatka glasi $ax = by$. Spojimo tačke C i O, a obeležimo sa M sredinu duži PK. Nije teško dokazati da su površine trouglova $\triangle POC$ i $\triangle KOC$ jednake. Naime, visina koja odgovara stranici $CK = x$ u trouglu $\triangle COK$ je jednaka polovini stranice a, jer se centar opisanog kruga O nalazi u preseku simetrala stranica. Sledi da je površina trougla $S_{COK} = \frac{ax}{4}$. Analogno dobijamo da je površina trougla $S_{COP} = \frac{by}{4}$. Sada tačka C pripada težišnoj duži OM trougla $\triangle POK$, što je i trebalo pokazati.

Rešenje 3. Kako je nejednakost homogena, možemo bez gubljenja opštosti da pretpostavimo $x + y + z = 1$. Sada dobijamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{z^2}{1-z} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Transformacijom $\frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -1 - x + \frac{1}{1-x}$ imamo $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \geqslant \frac{9}{2}$.

Iskoristimo nejednakost izmedju aritmetičke i harmonijske sredine ili Koši Švarc:

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}\right)((1-x) + (1-y) + (1-z)) \geqslant 3^2$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$.

Rešenje 4. Neka je A podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa maksimalnim brojem elemenata, koji ne sadrži ni jedan podskup A_i. Ako je $|A| = k$, tada za svaki $x \in X \setminus A$, postoji indeks $f(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tako da je $A_{f(x)} \subseteq A \cup \{x\}$.

Neka je $L_x = A \cap A_{f(x)}$, koji zbog prethodnog mora sadržati tačno 2 elementa. Kako je $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$ za sve $i \neq j$, svi skupovi L_x moraju biti različiti. Broj svih dvočlanih podskupova skupa A je $\binom{k}{2}$, pa imamo nejednakost

$$n - k \leqslant \binom{k}{2}.$$

Nejednakost je ekvivalentna sa $k^2 + k \geqslant 2n$. Kako je funkcija $x^2 + x$ rastuća za pozitivne realne brojeve x, dobijamo da je $k \geqslant \sqrt{2n} - 1 \geqslant \lfloor 2n \rfloor$.