

# Resšenja JBMO 2006

**Rešenje 1.** Podjimo od očigledne nejednakosti za pozitivne realne brojeve:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Sredjivanjem izraza dobijamo i primenom uslova  $3abc \geq a + b + c$  imamo:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac).$$

$$3abc(a + b + c) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac).$$

Sada skratimo trojke i sve podelimo sa  $abc$ :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a + b + c.$$

Jednakost važi ako i samo ako su  $a, b, c$  medjusobno jednaki.

**Alternativno rešenje 1.** Dokažimo sledeću nejednakost za pozitivne realne brojeve:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Transformacijom izraza i korišćenjem nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine imamo:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ac$$

Dodavanjem izraza  $2(ab + bc + ac)$  sa obe strane nejednakosti dobijamo:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc).$$

Jednakost važi akko važi jednakost u AG nejednakostima, odnosno  $a = b = c$ .

Podjimo od uslova  $3abc \geq a + b + c$  i pomnožimo obe strane sa  $(a + b + c)$ , dobijamo:

$$3abc(a + b + c) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc).$$

Sada imamo nejednakost  $abc(a + b + c) \geq ab + ac + bc$ , koja je ekvivalentna sa traženom.

**Rešenje 2.** Dokazaćemo da igrač  $B$  ima pobedničku strategiju. Posle poteza prvog igrača,  $B$  drži jednu kartu više nego igrač  $A$ . Ukoliko  $B$  ima kartu sa kojom je zbir karata na talonu deljiv sa  $2n + 1$ , on je baca i pobedjuje. U suprotnom, za svaku od karata prvog igrača  $B$  ima najviše po jednu kartu koju ne sme da odigra. Prema tome, igrač  $B$  ukoliko ne može da pobedi, on baca preostalu sigurnu kartu. Ovom strategijom igrač  $B$  ne može da izgubi partiju. Kako je je suma svih brojeva na kartama jednak

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) + 2n = n(2n + 1)$$

on je deljiv sa  $2n + 1$  i igrač  $B$ , ako ne ranije, pobedjuje na kraju.

Ovo je igra sa konačno mnogo pozicija, gde svaki igrač ima kompletan uvid u svoje i poteze protivnika i igra u kojoj nema nerešenog ishoda.

**Rešenje 3.** Označimo presečne tačke dva kruga sa  $X$  i  $Y$ . Neka su  $F'$  i  $E'$  podnožja normala iz  $F$  i  $E$  na stranice  $AC$  i  $AB$ . Kako je  $\angle FF'C = 90^\circ$ , dobijamo da tačka  $F'$  pripada krugu  $k_1$  nad prečnikom  $CF$ . Analogno i tačka  $E'$  pripada krugu  $k_2$  nad prečnikom  $BE$ .

Obeležimo centre krugova  $k_1$  i  $k_2$  sa  $O_1$  i  $O_2$ . Tačke  $O_1$  i  $O_2$  su, naravno, sredine prečnika  $BE$  i  $CF$ . Kako je četvorougao  $BCEF$  trapez, to dobijamo da je  $O_1O_2$ 平行于  $BC$ , odnosno  $O_1O_2 \parallel BC$ . Sada je očigledno da je  $XY \perp BC$ .

Ostaje da pokažemo da tačka  $A$  pripada pravoj  $XY$ . Četvorougao  $EFF'E'$  je tetivan, a centar tog kruga je na sredini  $EF$ . Kako je zbir naspramnih uglova u tetivnom četvorouglu jednak  $180^\circ$ , dobijamo  $\angle AE'F' = \angle FEA = \angle BCA$  i  $\angle AF'E' = \angle EFA = \angle ABC$ . Sada je i četvorougao  $E'F'BC$  tetivan, i iz potencije tačke  $A$  u odnosu na krug opisan oko  $E'F'BC$  sledi:

$$AF' \cdot AC = AE' \cdot AB.$$

**Lema 1.** Neka su data dva kruga sa centrima  $O_1$  i  $O_2$  koja se sekaju u tačkama  $X$  i  $Y$ . Geometrijsko mesto tačaka sa jednakim potencijama u odnosu na krugove je prava  $XY$ .

**Dokaz.** Svaka tačka  $A$  sa prave  $XY$  ima jednaku potenciju sa oba kruga i iznosi  $AX \cdot AY$ . Prepostavimo sada da  $A$  ima jednaku potenciju u odnosu na ova dva kruga i dokaži mo da se nalazi na pravoj  $XY$ . Neka prava  $AX$  seče krugove opet u tačkama  $Y'$  i  $Y''$ . Iz uslova imamo  $AX \cdot AY' = AX \cdot AY''$ , pa zaključujemo da je  $AY' = AY''$ . Sada mora biti  $A$  kolinearno sa  $X$  i  $Y$ , pa je lema dokazana.

**Lema 2.** Neka su date tačke  $A, B, C, D$  u ravni, tako da formiraju konveksan četvorougao  $ABCD$ . Tada je  $AC \perp BD$  ako i samo ako je  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

**Dokaz.** Neka je presek dijagonala tačka  $E$ . Prepostavimo da su dijagonale normalne, sada iz Pitagorine teoreme za četiri pravouglia trougla dobijamo:

$$AB^2 + CD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CE^2 + DE^2)$$

$$BC^2 + AD^2 = (BE^2 + CE^2) + (AE^2 + DE^2)$$

pa dobijemo jednakost  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

Za suprotan smer dokaza, koristimo činjenicu da je trougao oštrogli ako je  $a^2 < b^2 + c^2$ , pravougli ako je  $a^2 = b^2 + c^2$  i tupougli ako je  $a^2 > b^2 + c^2$ . Bez gubljenja opštosti možemo da prepostavimo da su uglovi  $\angle AEB = \angle CED$  tupi, dok su njihovi suplementarni uglovi oštri. Sada imamo:

$$AB^2 + CD^2 > (AE^2 + BE^2) + (CE^2 + DE^2)$$

$$BC^2 + AD^2 < (BE^2 + CE^2) + (AE^2 + DE^2)$$

Što je u kontradiciji postavke zadatka. Dakle, uglovi  $\angle AEB = \angle CED$  moraju biti pravi, pa se onda dijagonale sekaju pod pravim uglom.

**Rešenje 4.** Proverimo šta se dešava za male vrednosti  $n$  - dobijamo  $S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, S_4 = 17, S_5 = 28$  i vidimo da izmedju svaka dva uzastopna člana niza postoji potpun kvadrat. Pretpostavimo da tvrdjenje ne važi za neki prirodan broj  $n$ , tj. da  $S_n$  i  $S_{n+1}$  leže izmedju dva potpuna kvadrata.

$$m^2 \leq S_n < S_{n+1} \leq (m+1)^2.$$

Sada imamo nejednakost:

$$p_{n+1} = S_{n+1} - S_n \leq (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1.$$

Svaki od  $n$  prostih brojeva  $p_2, p_3, \dots, p_{n+1}$  je neparan, a izmedju 1 i  $2m+1$  postoji tačno  $m$  neparnih brojeva većih od 1. Zato je  $n \leq m$ . Slučaj  $n = m$  je moguć samo u slučaju da su svi neparni brojevi od 3 do  $2m+1$  prosti. Ovo je ekvivalentno sa  $n < 4$ , što smo proverili na početku. Dakle,  $n < m$ . Ostaje da procenimo sumu

$$S_n = p_n + p_{n-1} + \dots + p_2 + p_1 \leq (2m-1) + (2m-3) + \dots + (2(n-m+1)-1)$$

$$S_n < (2m-1) + (2m-3) + \dots + 3 + 1 = m^2.$$

Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je  $S_n \geq m^2$ . Dakle, izmedju svaka dva uzastopna člana  $S_n$  postoji potpun kvadrat.

**Alternativno rešenje 4.** Proverimo šta se dešava za male vrednosti  $n$  - dobijamo  $S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, S_4 = 17, S_5 = 28$  i vidimo da izmedju svaka dva uzastopna člana niza postoji potpun kvadrat. Dovoljno je pokazati da u intervalu  $(\sqrt{S_n}, \sqrt{S_{n+1}})$  postoji ceo broj, odnosno:

$$\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} > 1.$$

Poslednja nejednakost je ekvivalentna sa  $S_{n+1} > (\sqrt{S_n} + 1)^2$ , i najzad dobijamo:

$$p_{n+1} = S_{n+1} - S_n > 1 + 2\sqrt{S_n}$$

Za  $n \geq 4$ , imamo da je  $S_n$  veće od sume svih neparnih brojeva od 1 do  $2n-1$ . Ukoliko pretpostavimo suprotno i iskoristimo zadnju činjenicu, imamo:

$$p_{n+1} \leq 1 + 2\sqrt{S_n} < 1 + 2\sqrt{1+2+\dots+(2n-1)} = 1 + 2n$$

Poslednja nejednakost je moguća ako i samo ako su svi neparni brojevi od 1 do  $2n+1$  ujedno i prosti, odnosno za slučaj  $n \leq 4$ , koji smo proverili.

Suma svih neparnih brojeva od 1 do  $2n-1$  je jednaka  $n^2$ . Ovo se lako dokazuje:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n-1) &= (1+2+3+4+\dots+(2n-1)+2n) - (2+4+\dots+2n) = \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2(1+2+\dots+n) = n(2n+1) - n(n+1) = n^2 \end{aligned}$$