1. Нека је D тачка на страници AC троугла ABC у коме је $AB < BC$ таква да је $AB = BD$. Круг уписан у $\triangle ABC$ додирује AB у K и AC у L, а J је центар уписаног круга троугла BCD. Доказати да KL полови дуж AJ.

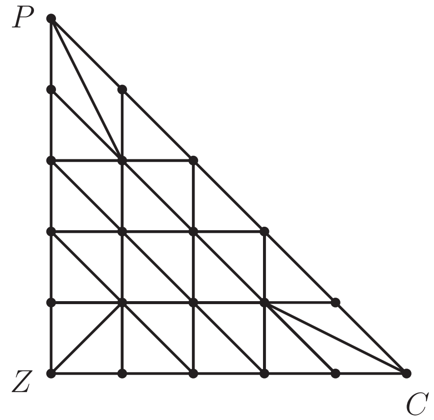
Решење. Нека је M тачка на AC таква да је $JM \parallel KL$. Довољно је доказати да је $AM = 2AL$.
Из $\sphericalangle BDA = \alpha$ добијамо $\sphericalangle JDM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle KLA = \sphericalangle JMD$, па је $JM = JD$, а додирна тачка уписаног круга $\triangle BCD$ са CD је средиште T дужи MD. Према томе, $DM = 2DT = BD + CD - BC = AB - BC + CD$, одакле је

$$AM = AD + DM = AC + AB - BC = 2AL.$$

2. Троугао $\triangle ZCP$ је подељен на 25 „малих“ троуглова (као на слици), а затим су сва темена тих троуглова обојена са три боје на следећи начин:

теме Z је обојено зеленом бојом, теме C црвеном, а теме P плавом;

свако од темена на дужи ZC обојено је или зеленом или црвеном бојом, свако од темена на дужи CP обојено је или црвеном или плавом бојом, а свако од темена на дужи ZP обојено је или зеленом или плавом бојом. Сва темена која се налазе у унутрашњости троугла обојена су без рестрикција, једном од три боје.



Доказати да без обзира на начин бојења, бар један од 25 „малих“ троуглова има сва три темена различите боје.

Решење. Посматраћемо странице малих троуглова које имају једно теме обојено црвеном, а друго плавом бојом. Такве странице ћемо звати црвено-плаве странице.

Свака црвено-плава страница која се налази у унутрашњости троугла $\triangle ZCP$ је страница тачно два мала троугла. Даље, свака црвено-плава страница која налази на једној од страница троугла $\triangle ZCP$ по услову задатка мора припадати баш дужи CP. С обзиром да је теме C обојено црвеном бојом а P плавом, број црвено-плавих страница на дужи CP је непаран.

Према томе, мора постојати бар један мали троугао који има непаран број црвено-плавих страница. Јасно, тај троугао има сва три темена различите боје.

3. Одредити све парове природних бројева (x, n) који су решења једначине

$$x^3 + 2x + 1 = 2^n.$$

Решење. Провером се добија да је пар $(1, 2)$ решење дате једначине (за $n = 1$), а да за $n = 2$ нема решења.

Докажимо да за $n \geqslant 3$ нема решења.
Како $3 \mid x \cdot (x^2 + 2)$ (уколико $3 \nmid x$ тада $3 \mid x^2 + 2$), мора бити $2^n \equiv 1 \pmod 3$, па је n паран број.
Додавањем обема странама једнакости броја 2 добија се

$$(x + 1)(x^2 - x + 3) = 2^n + 2.$$

Како је n паран, 2^n је потпун квадрат, па је број -2 квадратни остатак по сваком p, непарном простом делиоцу броја $(x+1)(x^2 - x + 3)$. Зато је

$$1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}},$$

одакле следи да је p облика $8k + 1$ или $8k + 3$.

Како је $x^2 - x + 3$ увек непаран, то број $x + 1$ мора бити дељив са 2, али не може бити дељив са 4, јер $4 \nmid 2^n + 2$ за $n \geqslant 2$, па x даје остатак 1 или 5 при дељењу са 8. Ако је $x \equiv 1 \pmod 8$, тада је $x^2 - x + 3 \equiv 3 \pmod 8$, па је $(x+1)(x^2 - x + 3) \equiv 6 \pmod 8$. Међутим за $n \geqslant 3$ број $2^n + 2$ даје остатак 2 при дељењу са 8, одакле се добија контрадикција (ово се могло лако приметити и у самом почетку задатка).

Ако је $x \equiv 5 \pmod 8$, тада је $x^2 - x + 3 \equiv 7 \pmod 8$. Међутим, тада број $x^2 - x + 3$ има прост делилац p облика $8s + 5$ или $8s + 7$, јер су непарни бројеви који имају све просте делиоце облика $8s + 1$ и $8s + 3$ увек облика $8s + 1$ или $8s + 3$, одакле се добија контрадикција.

Дакле, једино решење дате једначине је $(x, n) = (1, 2)$.

4. Нека је k природан број. За сваку функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, нека је низ функција $(f_m)_{m \geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = f$ и $f_{m+1} = f \circ f_m$ за $m \geqslant 1$. Функција f је *k-комутирајућа* уколико за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f_k(n) = f(n)^k.$$

(а) За које k постоји *1-1 k-комутирајућа* функција f?

(б) За које k постоји *на k-комутирајућа* фунција f?

Решење. За $k = 1$ услов се своди на $f(n) = f(n)$, тј. свака функција је 1-*комутирајућа*, па је одговор на питања под (а) и под (б) потврдан. Нека је надаље $k \geqslant 2$.

(а) Одговор: ДА.

Конструкција тражене функције f врши се индуктивно на следећи начин:

нека је n најмањи природан број чија слика није одређена;

(1) ако је $n = 1$, онда је $f(n) = 1$;

(2) уколико n није потпун k-ти степен изаберу се најмањих $k-1$ природних бројева $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$, који нису потпуни k-ти степени и за који до сада нису одређене слике, и пресликају се тако да је

$$f(n_1) = n_2,\ f(n_2) = n_3,\ \dots,\ f(n_{k-2}) = n_{k-1},\ f(n_{k-1}) = n_1^k;$$

(3) уколико је $n = a^k$, за неко $a \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(a)^k.$$

На овај начин функција f је добро дефинисана. Довољно је још показати да је она *1-1* *k-комутирајућа.*

k-комутирајућа:

Нека је $n \in \mathbb{N}$ број који није потпун k-ти степен. Тада постоје бројеви $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ из услова (2) такви да је $n_i = n$, за неко $1 \leqslant i \leqslant k-1$. При томе важи

$$f_k(n_i) = f_i(n_1^k) = f_i(n_1)^k = f(n_i)^k,$$

где се прва и трећа једнакост добијају узастопном применом (2), а друга узастопном применом (3), што је и требало доказати.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ потпун k-ти степен различит од 1. Тада је $n = n_i^{k^s}$ за неко $s \in \mathbb{N}$, где је n_i неки од бројева из услова (2). Према (3) тада је $f(n) = f(n_1)^{k^s}$ и даље индукцијом $f_m(n) = f_m(n_1)^{k^s}$, за све $m \in \mathbb{N}$. Како је $f_k(n_1) = f(n_1)^k$, тражена једнакост непосредно следи.

1-1:

Из услова (2) не може бити $f(a) = f(b)$ за два различита броја a и b који оба нису потпуни k-ти степени. Докажимо да је немогуће и $f(n_i) = f(m_j^{k^s})$, где су n_i и m_j бројеви из услова k $(1 \leqslant i, j \leqslant k-1)$. У супротном, како је $f(m_j^{k^s}) = f(m_j)^{k^s}$, то је $i = k-1$, тј. $n_1 = f(m_i)^{k^{s-1}}$. Међутим n_1 није потпун k-ти степен, па је $s = 1$ и самим тим $m_{i+1} = f(m_i) = n_1$, што је опет немогуће према (2).

Из претходног следи тврђење (а).

(б) Одговор: НЕ.

Претпоставимо супротно, тј. да је f *на k-комутирајућа* функција. Нека је a_0 број који није потпун k-ти степен. Приметимо да, како је f на функција, постоје бројеви $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-k}$, такви да је $f(a_{-m}) = a_{-m+1}$, за $1 \leqslant m \leqslant k$. Међутим, тада је $f(a_{-k})^k = f_k(a_{-k}) = a_0$, што је контрадикција са претпоставком да a_0 није потпун k-ти степен.

Коментар. Део под (а) се не мора директно набадати него се до њега може доћи одређеним поступцима (нпр. уколико је a слика онда је $f(a^k) = f(a)^k$, па одатле (3), а (2) је од почетка логично). Можда је потребно улепшати формулацију задатка (рецимо бирањем прикладнијег термина од *комутирајућа*).

5. Дат је неједнакокраки троугао ABC. Нека су AD, BE, CF симетрале углова овог троугла ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Нека су K_a, K_b, K_c тачке на уписаном кругу троугла ABC такве да су DK_a, EK_b, FK_c тангенте на уписани круг и да $K_a \notin BC$,

$K_b \notin AC$, $K_c \notin AB$. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB. Доказати да се праве A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c секу на уписаном кругу троугла ABC.

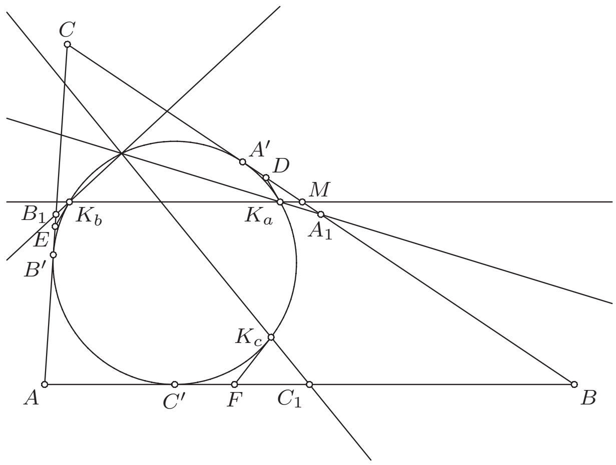
Решење. Докажимо да су троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ хомотетични. Да бисмо то доказали, довољно је да докажемо да је $K_aK_b \parallel A_1B_1$, односно $K_aK_b \parallel AB$ (аналогно ће следити и за друге парове страница).

Означимо $M = K_aK_b \cap BC$, са S означимо центар уписаног круга, и са T означимо произвољну тачку на уписаном кругу. Означимо $\alpha = \sphericalangle BAS$, $\beta = \sphericalangle CBS$, $\gamma = \sphericalangle ACS$. Користећи оријентисане углове (по модулу 180°), добијамо $\sphericalangle B'EB = \beta+2\gamma$, и аналогно $\sphericalangle A'DA = \alpha+2\beta$, а одатле и $\sphericalangle A'DK_a = 2\alpha+4\beta$. Затим, $\sphericalangle B'TK_b = \sphericalangle B'SE = 90^\circ+\sphericalangle B'ES = \gamma-\alpha$ и аналогно $\sphericalangle A'TK_a = \beta-\gamma$. Затим, $\sphericalangle A'TB' = \sphericalangle A'SC = 90^\circ + \sphericalangle A'CS = \alpha+\beta$. И на крају добијамо $\sphericalangle K_aTK_b = \sphericalangle K_aTA' + \sphericalangle A'TB' + \sphericalangle B'TK_b = 2\gamma$.

Такође, из троугла DK_aM добијамо $\sphericalangle CMK_a = \sphericalangle CDK_a + \sphericalangle DK_aM = \sphericalangle A'DK_a + \sphericalangle DK_aK_b = (2\alpha+4\beta) + \sphericalangle K_aTK_b = (2\alpha+4\beta)+2\gamma = 2\beta$. Дакле, $\sphericalangle CMK_a = \sphericalangle CBA$, одакле следи да је $K_aK_b \parallel AB$, што је требало доказати. Дакле, троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ су хомотетични.

Приметимо такође да је коефицијент хомотетије позитиван: ако би био негативан, дужи K_aA_1, K_bB_1, K_cC_1 би се секле у једној тачки. Ако је $\alpha > \beta$, онда се тачке C_1 и K_c, па и цела дуж K_cC_1, налазе унутар четвороугла $SFBD$. Зато, ако без умањења општости претпоставимо $\alpha > \beta > \gamma$, онда $K_cC_1 \subset SFBD$, али $K_aA_1 \subset SDCE$, па су ове две дужи дисјунктне.

Како су троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ хомотетични, њихови описани кругови су такође хомотетични. Али то су Ојлеров и уписани круг троугла ABC, респективно, и познато је да се та два круга додирују изнутра у Фојербаховој тачки троугла ABC. Стога (уз чињеницу да је коефицијент хомотетије позитиван), центар хомотетије је управо Фојербахова тачка. Одавде следи да се A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c секу у Фојербаховој тачки троугла ABC, која припада уписаном кругу троугла ABC, чиме је тврђење доказано.



Алтернативно решење. Нека је уписани круг троугла ABC јединична кружница у комплексној равни. Тада је $a = \frac{2b'c'}{b'+c'}$, $b = \frac{2a'c'}{a'+c'}$, $c = \frac{2a'b'}{a'+b'}$. Затим је

$$a_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{a'^2b' + a'^2c' + 2a'b'c'}{(a'+b')(a'+c')}.$$

Вредност k_a налазимо из услова $\frac{k_a}{a} = \overline{\left(\frac{a'}{a}\right)}$, одакле је $k_a = \frac{1}{a'}\frac{a}{\overline{a}} = \frac{b'c'}{a'}$. Сада налазимо пресечну тачку z уписаног круга (одакле $|z| = 1$) и праве K_aA_1 (одакле

$\frac{z-k_a}{a_1-k_a} = \overline{\left(\frac{z-k_a}{a_1-k_a}\right)}$). Други услов можемо трансформисати у облик

$$\overline{(a_1-k_a)}(z-k_a) = (\frac{1}{z} - \frac{1}{k_a})(a_1-k_a),$$

одакле (због $z \neq k_a$) следи $\overline{(a_1-k_a)} = -\frac{1}{zk_a}(a_1-k_a)$, па је

$$z = -\frac{1}{k_a}\frac{a_1-k_a}{\overline{(a_1-k_a)}} = -\frac{(a'^2-b'c')(a'b'+a'c'+b'c')}{(b'c'-a'^2)(a'+b'+c')} = \frac{a'b'+a'c'+b'c'}{a'+b'+c'}.$$

Како је наведени израз симетричан по a', b', c', аналогно се доказује да ће праве K_bB_1 и K_cC_1 сећи уписани круг у истој тачки, чиме је тврђење доказано.

6. Нека је k природан број. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z чији је збир једнак 1, важи неједнакост

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geqslant \frac{1}{7}.$$

Решење. Дати израз је симетричан, па се без губљења општости може претпоставити да је $x \geqslant y \geqslant z$. Тада је

$$x^{k+1}+y^k+z^k \leqslant y^{k+1}+z^k+x^k \leqslant z^{k+1}+x^k+y^k.$$

Довољно је доказати прву неједнакост, тј. да је $x^{k+1}+y^k \leqslant y^{k+1}+x^k$. Ова неједнакост је еквивалентна са $\left(\frac{y}{x}\right)^k \leqslant \frac{1-x}{1-y}$. Како је $y \leqslant x$, то је довољно доказати да је $\frac{y}{x} \leqslant \frac{1-x}{1-y}$, што је еквивалентно неједнакости $0 \leqslant x - x^2 - y + y^2 = (x-y)(1-x-y) = (x-y)z$, која је тачна. Применом неједнакости Чебишева на тројке

$$(x^{k+2}, y^{k+2}, z^{k+2}) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}, \frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}, \frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right),$$

добија се

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geqslant \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} x^{k+2} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} = L$$

Уколико се у L поново примени неједнакост Чебишева на тројке (x, y, z) и $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ добија се

$$L \geqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{\text{cyc}} x \sum_{\text{cyc}} x^{k+1} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} = L'. \qquad (*)$$

Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског следи

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \sum_{\text{cyc}} (x^{k+1}+y^k+z^k) \geqslant 9,$$

па је

$$L' \geqslant \frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)},$$

и самим тим довољно је доказати да је

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geqslant x^k+y^k+z^k.$$

Последња неједнакост се добија поновном применом неједнакости Чебишева на тројке (x, y, z) и (x^k, y^k, z^k).

Једнакост у свим примењеним неједнакостима важи ако и само ако је $x = y = z$, тј. ако и само ако је $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.