Društvo matematičara Srbije

Pripreme za Juniorske olimpijade školske 2007/2008

Đorđe Baralić
Tel:063/706-706-6
e-mail:djolebar@ptt.yu

Racionalni i iracionalni brojevi

Malo teorije

Definicija. Realan broj α nazivamo racionalnim ako se može zapisati u obliku $\frac{p}{q}$ gde je p ceo broj $p \in \mathbb{Z}$ i q prirodan broj $q \in \mathbb{N}$.

Iz definicije sledi da racionalan broj možemo zapisati u obliku $\frac{p}{q}$ i da je $NZD(p, q) = 1$. Ovo je veoma važna osobina racionalnih brojeva.

Definicija. Ukoliko realan broj nije racionalan za njega kažemo da je iracionalan. Neki iracionalni brojevi su: π, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Primer 1. Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan.
Dokaz: Pretpostavimo, suprotno tj. da je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ racionalan broj i $NZD(p, q) = 1$.
Kada kvadriramo dobijamo da je

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

a odavde je $2\,q^2 = p^2$. Kako je leva strana deljiva sa 2 ti desna mora biti deljiva sa 2, pa je $p = 2\,p_1$. Kada uvrstimo i podelimo sa 2 dobijamo

$$q^2 = 2\,p_1^2$$

Odavde ponovo zaključujemo da mora i $q = 2\,q_1$. Ali, iz $p = 2\,p_1$ i $q = 2\,q_1$ sledi da $2|p$ i $2|q$, a to je kontradikcija sa tim da je $NZD(p, q) = 1$. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan.

Sledeća tvrđenja su jako važna.

Teorema. Zbir, razlika, proizvod i količnik (kada su oba različita od 0) dva racionalna broja je racionalan broj.

Teorema. Zbir, razlika, proizvod (ako su oba različita od 0) i količnik jednog racionalnog i jednog iracionalnog broja je iracionalan broj.

Zbir, razlika, proizvod i količnik dva iracionalna broja može da bude i racionalan i iracionalan broj.

Primer 2. Dokazati da je $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ iracionalan broj.
Dokaz: Pretpostavimo da je $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ racionalan. Neka je $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{p}{q}$ i $NZD(p, q) = 1$. Posle kvadriranja ove jednakosti dobijamo da je $2+\sqrt{3} = \frac{p^2}{q^2}$. Pošto je leva strana iracionalan broj kao zbir racionalnog i iracionalnog broja (dokažite da

je $\sqrt{3}$ iracionalan) iracionalan broj, a desna očigledno racionalan broj, to je jednakost nemoguća. Dakle, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ je iracionalan broj.

Svaki realan broj ima svoj decimalan zapis.

Primer 3. Decimalni zapisi nekih racionalnih brojeva:

$$\frac{2}{5} = 0.4 \quad \frac{1}{3} = 0.3333\ldots \quad \frac{19}{9} = 2.1111\ldots$$

Teorema. Realan broj je racionalan ako i samo ako ima konačan ili periodičan zapis.

Primer 4. Napisati broj $x = 0.20072007\ldots$ u obliku razlomka.
Rešenje: Primetimo da je 2007 niz cifara koji se ponavlja. Pomnožimo x sa 10000 i dobijamo $10000x = 2007.20072007\ldots$. Dalje je $10000x - x = 2007.20072007\ldots - 0.20072007\ldots = 2007$ pa je konačno $x = \frac{2007}{9999} = \frac{223}{1111}$.

Primer 5. Dokazati da je broj $0.101001000100001\ldots$ iracionalan broj (iza svake jedinicese svaki put nalazi po jedna nula više).
Rešenje: Očigledno naš broj nema konačan decimalni zapis. Dokažimo da nema ni periodičan. Zista ako bi zapis bio periodičan tada bi se počev od nekog mesta ponavljao neki konačan niz cifara. Neka se od neke m-te pozicije iza decimalnog zareza ponavlja niz od k cifara $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$. Neka je $N > max\{m+k, 3k+1\}$. Posmatrajmo šta se dešava na pozicijama iza N te jedinice iza decimalnog zapisa. Tu se nalazi N nula. Pošto je $N > m+k$ to znači da su te nule u delu broja koji se ponavlja. Kako je $N > 3k+1$ to se u tih N nula sadrži bar jedan period tj, niz $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$. Međutim do povlači i da su tih k cifara sve nule. Međutim, to znači da se posle m te pozicije nalaze samo 0, a to je nemoguće jel imam beskonačno mnogo jedinica iza decimalnog zareza.

Teorema. $NZD(p, q) = 1$ ako i samo ako postoje celi brojevi α, β takvi da je $\alpha p + \beta q = 1$.

Primer 6. Dokazati da se razlomak $\frac{2n+3}{5n+7}$ ne može skratiti.
Rešenje: Imamo da je $5 \cdot (2n+3) + (-2) \cdot (5n+7) = 1$ pa je saglasno gornjoj teoremi $NZD(2n+3, 5n+7) = 1$, a to znači da se razlomak ne može skratiti.

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da su sledeći brojevi iracionalni:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

2. Napisati sledeće brojeve u obliku razlomka:

a) $0.121212\ldots$ b) $2.0072007\ldots$ c) $2007.200820072008\ldots$

3. Šta je veće: $5+2\sqrt{7}$ ili $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$?

4. Da li je vrednost izraza $1.494949\ldots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ racionalan ili iracionalan broj?

5. Naći cifru koja je na 2007. mestu u broju $\frac{13}{101}$.

6. Ako su a, b, c i $\frac{a-b\sqrt{2003}}{b-c\sqrt{2003}}$ racionalni brojevi, dokazti da je tada $ac = b^2$.

7. Ako je a ceo broj različit od 1, dokazati da je $a + \frac{1}{a}$ nije ceo broj.

8. Odrediti najmanji prirodan broj n za koji je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}}$$

prirodan broj.

9. Izračunati $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

10. Da li postoje racionalni brojevi x, y, z, t takvi da važi

$$(x+y\sqrt{2})^2 + (z+t\sqrt{2})^2 = 5+4\sqrt{2}.$$

11. Dokazati da se razlomci $\frac{12n+1}{30n+2}$ i $\frac{21n+4}{14n+3}$ ne mogu skratiti ni za jedan prirodan broj n.

12. Dokazati da je broj

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}$$

iracionalan za sve prirodne brojeve $n > 1$.

13. Data su tri broja: 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$.

a) Jednim potezom dozvoljeno je zameniti svaki od napisanih brojeva poluzbirom druga dva. Da li se ponavljajući ovaj postupak konačan broj puta može doći do brojeva: $1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$?

b) Jednim potezom dozvoljeno je bilo koja dva broja zameniti njihovim zbirom podeljenim sa $\sqrt{2}$ i razlikom podeljenom sa $\sqrt{2}$, ostavljajući treći broj nepromenjenim. Može li se posle konačnog broja poteza doći do brojeva: 1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

14. Dokazati da je

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{korena}} < 2$$

za svaki prirodan broj n.

15. Dokazati da je

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}} < 4.$$

16. Naći sva rešenja (a, b) u skupu racionalnih brojeva jednačine

$$(a+b\sqrt{2})^2 = 11+14\sqrt{2}.$$

17. Dokazati da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ iracionalan broj.

18. Ako su a, b, c pozitivni racionalni brojevi, dokazati da je i

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2}$$

takođe racionalan.

19. Dokazati da jednačina $x^2+px+q=0$ ne može imati racionalna rešenja ako su p i q racionalni brojevi.

20. Dokazati jednakost

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2 = 2.$$

21. Za koje prirodne brojeve n je izraz

$$\frac{\sqrt{1997}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{1997}-\sqrt{n}}$$

ceo broj?

22. Dokazati da je razlomak $\frac{3n+1}{2n^2+n}$ neskrativ.

23. Ako su x, y, z realni brojevi takvi da su xy, yz, zx racionalni brojevi različiti od 0. Dokazati:

a) broj $x^2+y^2+z^2$ je racionalan;

b) ako je $x^3+y^3+z^3$ racionalan broj različit od nule, tada su x, y, z racionalni brojevi.

24. Izračunati vrednost izraza za $x = 3-\sqrt{2}$:

$$\sqrt{(3x-1)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}.$$

25. Neka su n i m prirodni brojevi takvi da je broj $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ racionalan. Dokazati da su n i m potpuni kvadrati.

26. Odrediti 2005-tu cifru broja $\sqrt{a}$, gde je a broj:

$$a = 0.\underbrace{444\ldots444}_{2005}.$$

27. Izračunati zbir:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

28. Neka su a i b prirodni brojevi čiji je zbir 1. Ako su a^3 i b^3 racionalni brojevi, dokazati da su a i b racionalni brojevi.

29. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj m takav da je $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$.

30. Ako su brojevi $x + \sqrt{y}$, $y + \sqrt{x}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ celi. Dokazati da su i brojevi x i y celi brojevi.

31. Dokazati da je broj $0.123456789101112\ldots$ (ispisivanje svih prirodnih brojeva iza decimalnog zareza) iracionalan.

32. Dokazati da su brojevi $0.1491625364964\ldots$ (ispisivanje svih kvadrata prirodnih brojeva iza decimalnog zareza) iracionalan.