Beograd, jun 2006.

Pripreme za Juniorsku Balkanijadu

Nejednakosti

Đorđe Baralić
djolebar@ptt.yu
063-706-706-6

1. Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi delioci prirodnog broja $n > 1$. Dokazati da je

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

2. Neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ prirodni brojevi i $[a_i, a_j] = NZS(a_i, a_j)$. Dokazati da je

$$\frac{1}{[a_1,\, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \ldots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1$$

3. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da su najviše dva broja od brojeva $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$, $2c - \frac{1}{a}$ veći od 1.

4. Neka su a, b, c, d, e realni brojevi takvi da je $a + b + c + d + e = 0$ i neka je $A = ab + bc + cd + de + ea$ i $B = ac + ce + eb + bd + da$. Dokazati da je $2005A + B \leq 0$ ili $2005B + A \leq 0$.

5. Dokazati da u trouglu važi nejednakost

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

6. Dokazati da u trouglu važi nejednakost

$$\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq \sqrt{3s}.$$

7. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

8. Poluprečnik upisanog kruga trougla je $\frac{\sqrt{3}}{3}$, a obim je 6. Odrediti uglove trougla.

9. Neka je

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996\cdot 1997}{2}}}.$$

Dokazati da je $S > 1001$.

10. Neka su a, b, c dužine stranica trougla. Dokazati da je

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

11. Dokazati da za proizvoljne pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

12. Neka su a_1, $a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da je

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}.$$

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, takvi da je $abc=1$. Dokazati da je

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

14. Dokazati da za svaka tri pozitivna realna broja a, b, c važi nejednakost:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1 \leq \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ca}.$$

15. Neka su a, b, $c > 0$ realni brojevi i $a+b+c \leq 3abc$. Dokazati nejednakost :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq a+b+c.$$

16. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

17. Neka su a, b, $c > 0$ realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

18. Neka su x, y, $z > -1$ realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

19. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

20. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3$. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

21. Neka su a, b i c realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$