45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Бугарска – Плевен, 9.–19. јул 2004.

Први дан

понедељак, 12. јул 2004.

1. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ такав да је $AB \neq AC$. Кружница чији је пречник BC сече странице AB и AC у тачкама M и N редом. Означимо са O средиште странице BC. Симетрале углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$ секу се у тачки R. Доказати да се кружнице описане око троуглова $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ секу у тачки која припада страници BC.

Румунија

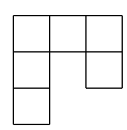
2. Одредити све полиноме $P(x)$ са реалним коефицијентима који задовољавају једнакост

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2p(a+b+c)$$

за све реалне бројеве a, b, c за које је $ab+bc+ca=0$.

J. Кореја

3. Нека је *кука* фигура састављена од шест јединичних квадрата као на слици



или ма која фигура добијена од ове фигуре применом ротација и осних симетрија. Одредити све $m \times n$ правоугаонике који се могу покрити кукама тако да

- правоугаоник буде покривен без празнина и без преклапања;
- ни један део куке не буде изван правоугаоника.

Естонија

Други дан
уторак, 13. јул 2004.

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ позитивни реални бројеви такви да је

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Доказати да су t_i, t_j, t_k дужине страница троугла, за све i, j, k за које је $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Ј. Кореја

5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дијагонала BD није симетрала нити угла $\sphericalangle ABC$ нити угла $\sphericalangle CDA$. Тачка P која се налази унутар четвороугла $ABCD$ је таква да је

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{и} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Доказати да је $ABCD$ тетивни четвороугао ако и само ако је $AP = CP$.

Пољска

6. Природан број називамо *алтернирајући* ако су сваке две суседне цифре у његовом децималном запису различите парности.

Одредити све природне бројеве n, за које постоји алтернирајући број дељив са n.

Иран