44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Јапан – Токио, 11.–19. јул 2003.

Први дан
недеља, 13. јул 2003.

1. Нека је A подскуп скупа $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$, који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S такви да су скупови

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

по паровима дисјунктни.

Бразил

2. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да је

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

природан број.

Бугарска

3. Дат је конвексан шестоугао код кога за сваке две наспрамне странице важи: растојање између њихових средишта једнако је производу броја $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и збира њихових дужина. Доказати да су сви углови тог шестоугла једнаки. (Конвексан шестоугао $ABCDEF$ има три пара наспрамних страница: AB и DE, BC и EF, CD и FA.)

Пољска

Други дан

понедељак, 14. јул 2003.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Нека су P, Q и R подножја нормала из тачке D на праве BC, CA и AB редом. Доказати да је $PQ = QR$ ако и само ако се симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу на правој AC.

Финска

5. Нека је n природан број и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви такви да је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

а) Доказати да је

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

б) Доказати да једнакост вреди ако и само ако је $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аритметичка прогресија.

Ирска

6. Нека је p прост број. Доказати да постоји прост број q такав да, за сваки цео број n, број $n^p - p$ није дељив са q.

Француска