Društvo matematičara Srbije

Pripreme za Juniorske olimpijade školske 2007/2008

Đorđe Baralić
Tel:063/706-706-6
e-mail:djolebar@ptt.yu

Matematička indukcija

Primer 1. Dokazati da je $2^n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Intuitivno znamo da je $2^n > n$ *za* $n \in \mathbb{N}$ *jer je* $2^1 = 2 > 1$, $2^2 = 4 > 2$, $2^3 = 8 > 3$... *Ali, ne moguće je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *proveriti da li je* $2^n > n$ *(recimo za* $n = 20000000000$*). Kako, onda dokazati nešto što je očigledno?*

Rešenje: 1) Očigledno je $2^1 > 1$.
2) Pretpostavimo da je za neki prirodan broj n, $2^n > n$.
3) Iz pretpostavke da je $2^n > n$ sledi da je $2 \cdot 2^n > 2n$ tj. $2^{n+1} > 2n = n + n \geq n + 1$
Odavde tvrđenje važi za sve $n \in \mathbb{N}$!$\square$

Formulacija principa matematičke indukcije:
Dokazujemo iskaz koji važi za sve prirodne brojeve n i označimo ga sa $P(n)$ (*npr. P(n) je iskaz* $2^n > n$)
1. Dokažemo da je tačan iskaz $P(1)$ (*proverimo da li je* $2^1 > 1$).
2. Pretpostavimo da je tačan iskaz $P(n)$ i dokažemo da je onda tačan $P(n+1)$, tj. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (*dokažemo da iz* $2^n > n$ *sledi* $2^{n+1} > n+1$)

Ukoliko dokažemo stavke 1. i 2. dokazali smo da iskaz $P(n)$ važi za sve $n \in \mathbb{N}$. Stavka 1. se naziva **baza indukcije**, stavka 2. **induktivni korak**. Obično u stavci 2. pretpostavku da važi $P(n)$ zovemo **induktivna pretpostavka (hipoteza)**.

Primer 2. Dokazati da je $2^n > n^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

Rešenje: 1) Imamo da je $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
2) Pretpostavimo da je za neki prirodan broj $n \geq 5$, $2^n > n^2$.
3) Iz pretpostavke da je $2^n > n^2$ sledi da je $2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 5n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ jer je $n \geq 5$.
Odavde tvrđenje važi za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$!$\square$

Za bazu indukcije je dozvoljeno uzeti najmanji prirodni broj za koji neko tvrđenje važi (*ne mora to biti 1*)

Primer 3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi takvi da je $0 < a_k \leq k$ za sve $k = 1, 2, \ldots, n$. Ako je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ paran broj dokazati da je moguće postaviti znake $+$ i $-$ tako da izraz

$$a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = 0$$

(Rumunija, Izborno takmičenje za JBMO 2008)

Rešenje: Dokaz ćemo sprovesti primenom matematičke indukcije.

1) Za $n = 2$ imamo da je $0 < a_1 \leq 1$ i $0 < a_2 \leq 2$. Odavde je $a_1 = 1$ i zbog uslova da je $a_1 + a_2$ parno mora biti i $a_2 = 1$ Jasno, tada je $a_1 - a_2 = 1 - 1 = 0$

2) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od nekog prirodnog broja $n \geq 2$

3) Dokažimo da tvrđenje važi i za prirodan broj n.
Ako je $a_{n-1} = a_n$, tada je izraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}$ paran, pa se prema induktivnoj hipotezi (tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od n) mogu odabrati znaci $+$ i $-$ takvi da je $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-2} = 0$. Očigledno dodajući na ovaj izbor znakova a_{n-1} i oduzimajući a_n dobijamo

$$a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-2} + a_{n-1} - a_n = 0$$

Ako je $a_{n-1} \neq a_n$ tada je zbog $0 < a_{n-1} \leq n - 1$ i $0 < a_n \leq n$ i $0 < |a_{n-1} - a_n| \leq n - 1$. Izraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + |a_{n-1} - a_n|$ je iste parnosti kao i $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (dokazati1) pa se prema induktivnoj pretpostavci mogu odabrati znaci $+$ i $-$ takvi da je $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-2} \pm |a_{n-1} - a_n| = 0$ od kojih direktno sledi (pošto je $|a_{n-1} - a_n| = a_{n-1} - a_n$ ili $|a_{n-1} - a_n| = -a_{n-1} + a_n$) da postoji izbor takav da je

$$a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-2} \pm a_{n-1} \mp a_n = 0$$

Ovim je dokaz indukcijom završen. $\square$

U induktivnoj pretpostavci je dozvoljeno pretpostaviti da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje (manje ili jednake) od nekog prirodnog broja n. Ovaj modifikovani oblik indukcije nazivamo **potpuna indukcija**.

Primer 4. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

(Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine)

Rešenje: Dokaz ćemo sprovesti matematičkom indukcijom po n.

1) Za $n = 2$ nejednakost koju dokazujemo sledi iz $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ (proveriti).

2) Dokažimo da ako je nejednakost tačna za n brojeva onda je ona tačna za $2n$ brojeva. Zaista,

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n}\right)$
$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{2n}}\right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2n}}$

3) Dokažimo da ako je nejednakost tačna za n brojeva onda je ona tačna za $n - 1$ brojeva. Nejednakost je tačna za bilo kojih n pozitivnih realnih brojeva, pa i za brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Odatle je

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}$$

Sređivanjem se dobija

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}$$

Posle stepenovanja i leve i desne starane na n dobija se

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$

što posle sređivanja i $n-1$ korenovanja dobijamo

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}}$$

Ovim je dokaz indukcijom završen!$\Box$

Iskaz $P(n)$ možemo da dokažemo i na sledeći način:
1) Dokažemo $P(1)$
2) Dokažemo da pretpostavka da je tačan iskaz $P(n)$ povlači da je tačan iskaz $P(2n)$ tj. $P(n)\Rightarrow P(2n)$
3) Dokažemo da pretpostavka da je tačan iskaz $P(n)$ povlači da je tačan iskaz $P(n-1)$ tj. $P(n)\Rightarrow P(n-1)$

Ovakav tip indukcije se naziva **regresivna indukcija**.

Primer 5. Dokazati da za svaki prirodan broj važi

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Rešenje: Indukcijom po $n=1$.
1) Imamo da je $1^3=\frac{1^2(2)^2}{4}=1$.
2) Pretpostavimo da tvrđenje važi za neki prirodan broj n
3) i dokažimo da onda važi i za $n+1$. Koristeći induktivnu hipotezu dobijamo
$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
Ovim je dokaz završen. $\Box$

Zadaci

Sume i identiteti

1. Dokazati sledeće identitete za sve prirodne brojeve n:
a) $1^2+4^2+\cdots+(3n-2)^2=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$
b) $1+x+x^2+\ldots x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ za sve $x\in\mathbb{R}$
c) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$
d) $1\cdot 2\cdot 2^n+2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot 2+(n+1)\cdot(n+2)\cdot 1=2^{n+4}-(n^2+7n+14)$

2. Dokazati da je za svaki prirodan broj n važi

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{2^2}+\cdots+\frac{n\cdot(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

3. Dokazati da je za svaki prirodan broj n važi

$$\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right)^2=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

4. Dokazati da za sve prirodne brojeve m, $n \in \mathbb{N}$ važi

$$1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}=(-1)^m\cdot\frac{(n+m)!}{n!}$$

(Velika Britanija 1981)

Uputstvo: Indukcijom po m.

5. Razmotrimo sve moguće podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ koji ne sadrže dva uzastopna broja. Dokazati da je suma kvadrata proizvoda brojeva u tim podskupovima jednaka $(N+1)!-1$.

(Rusija, Sankt Petersburg olimpijada 1990)

Nejednakosti

1. Dokazati da je

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{korena}}<2$$

za svaki prirodan broj n.

2. Dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti:
a) $2\sqrt{n}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$
b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
c) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\frac{2}{n^2}$
d) $\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$ za $n>6$

3. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\frac{1}{2}$$

Uputstvo: Dokazati da je suma na levoj strani jednaka $\frac{(2n+1)!!-1}{2\cdot(2n+1)!!}$ gde je $(2n+1)!!=3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)$

4. Dokazati da za realne brojeve a, $b \in [0,1]$ i sve $n \in \mathbb{N}$ važi nejednakost

$$(a+b-ab)^n+(1-a^n)(1-b^n)\geq 1$$

5. Neka su $0\leq a_i\leq 1$ za $i=1, 2, \cdots, n$. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}$$

Uputstvo: Regresivnom indukcijom po n.

Teorija brojeva

1. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot p_s^{\alpha_s}$ kanonska faktorizacija prirodnog broja n. Neka su $\tau(n)$, $\sigma(n)$ i $\varphi(n)$ redom broj ralčitih delilaca broja n, zbir svih različitih delilaca broja n i broj prirodnih brojeva koji su manji od n i uzajamno prosti sa n. Dokazati:
a) $\tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_s)$
b) $\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \frac{p_1^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$
c) $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$
Uputstvo: Indukcijom po broju prostih delilaca s broja n.

2. Dokazati da za svaki prirodan broj važi:
a) $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$
b) $27|10^n + 18n - 1$
c) $133|11^{n+2} + 12^{2n+1}$
d) $59|5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$
e) $2304|7^{2n} - 48n - 1$

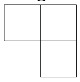
3. Neka je p prost broj. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi da je $n^p - n$ deljiv sa p.

4. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj k takav da je $k \cdot 2^n + 17$ potpun kvadrat.
Rešenje: Indukcijom po n.
1) Za $n = 1$ uzmimo da je $k = 4$ i dobijamo $4 \cdot 2^1 + 17 = 25 = 5^2$
2) Pretpostavimo da za neki prirodan broj postoji k takvo da je $k \cdot 2^n + 17 = m^2$ za neko $m \in \mathbb{N}$
3) i dokažimo da takav broj postoji za $n+1$. Neka je k takvo da je $k \cdot 2^n + 17 = m^2$ (induktivna pretpostavka).
Ako je k parno tada je $k = 2t$ za neko $t \in \mathbb{N}$. Tada je
$m^2 = k \cdot 2^n + 17 = 2t \cdot 2^n + 17 = t \cdot 2^{n+1} + 17$
pa je $t = \frac{k}{2}$ traženi broj za $n + 1$.
Ako je k neparno tada posmatramo izraz $2^n \cdot (k + m + 2^{n-2}) + 17$. Koristeći induktivnu pretpostavku da je $k \cdot 2^n + 17 = m^2$ dobijamo
$2^n \cdot (k + m + 2^{n-2}) + 17 = 2^n \cdot k + 17 + 2^n \cdot m + 2^{2n-2} = m^2 + 2 \cdot m \cdot 2^{n-1} + 2^{2n-2} = (m + 2^{n-1})^2$.
Pošto je k neparno, m neparno, 2^{n-2} parno (proveriti da ovakav slučajmo nastupa kada je $n \geq 3$ pa je broj $k + m + 2^{n-2}$ paran, pa je $t = \frac{k+m+2^{n-2}}{2}$ broj koji u ovom slučaju zadovoljava uslove zadatka.
Ovim je dokaz indukcijom završen.

Kombinatorika

1. Jednakostraničan trougao ABC podeljen je na male trouglove tako što mu je svaka strana podeljena na n jednakih duži koje su onda povezane dužima paralelnim stranicama trougla. Svako od novonastalih temena je označeno jednim od slova A, B ili C. Dokazati da važi bar jedno od tvrđenja:
a) Postoji mali trougao kome su temena označena slovima A, B i C
b) Postoje tri kolinearne tačke koje su označene slovima A, B i C.

2. Dokazati je broj načina da se pravougaonik dimenzija $m \times n$ poploča sa figurama



paran.

Uputstvo: Indukcija po $N = mn$ površini pravougaonika.

3. Dokazati da postoji skup sa n prirodnih brojeva tako da za svaka 2 broja a i b iz ovoga skupa važi $(a-b)^2 | ab$.

(SAD 1998)

4. Dokazati da se tabla dimenzije $n \times n$, $n > 2$ bez ugaonih polja može popločati sa

figurama

ako i samo ako je $n-2$ deljivo sa 4.

5. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Rešenje: Označimo sa $g_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}$. Za $n = 1$ dobijamo da je $g_1 = 1$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neki prirodan broj n. Imamo da je: $g_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} =$
$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k-1} \frac{1}{k} = g_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} +$
$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{n+1} =$
$= g_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n+1}{k} =$
$= g_n - \frac{1}{n+1} \left((-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n+1}{k} \right) =$
$= g_n - \frac{1}{n+1} \left((-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k} \binom{n+1}{k} \right) = g_n + \frac{1}{n+1}$, pa na osnovu induktivne hipoteze tvrđenje važi i za $n+1$.■