Kombinatorika

Aleksandar Ilić, Prirodno Matematički fakultet Niš
Pripreme za Srpsku matematičku olimpijadu 2008 godine

1. U hodniku se nalazi 2008 ugašenih sijalica, numerisanih brojevima od 1 do 2008. Svaki od 2008 učenika redom prolazi hodnikom i menja stanje sijalica na sledeći način: k-ti učenik pritiska prekidač za sijalice koje su označene rednim brojem koji je deljiv sa k (ako je sijalica bila upaljena - ona se gasi; ukoliko je bila ugašena - pali se). Odrediti broj upaljenih sijalica nakon prolaska poslednjeg učenika.

2. Posmatrajmo prirodne brojeve n koji su manji od 10000. Da li među njima ima više onih čiji je zbir cifara jednak 18 ili onih kod kojih je zbir cifara jedinica i desetica jednak zbiru cifara stotina i hiljada? Ukoliko neka od tih cifara nedostaje, smatra se da je ona jednaka 0 (936 zadovoljava oba uslova jer je $9 + 3 + 6 = 18$ i $0 + 9 = 3 + 6$).

3. Temena pravilnog 2007-ugla su obojena crno ili belo. Dokazati da postoji jednakokraki trouglao čija su sva temena iste boje. Da li isto važi i za pravilni osmougao?

4. Koliko ima nepraznih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 2008\}$, tako da je suma najvećeg i najmanjeg broja jednaka 2009?

5. U krugu poluprečnika 16 se nalazi 650 tačaka. Dokazati da postoji prsten sa unutrašnjim radijusom 2 i spoljašnjim 3, koji pokriva bar deset tačaka.

6. Da li se kocka dimenzija $6 \times 6 \times 6$ može sastaviti pomoću delova oblika kvadra $1 \times 1 \times 4$?

7. Na tabli je zapisan broj 2. Igrač koji je na potezu dodaje broju na tabli proizvoljan broj od 1 do 2007. Prvi igrač koji dobije broj koji nije prost gubi. Dokazati da će se igra završiti i odrediti koji igrač ima pobedničku strategiju.

8. Dokazati da je svaki mnogougao površine 1, sadržan u nekom pravougaoniku površine manje ili jednake od 2.

9. Dato je $n + 1$ tegova sa celobrojnim težinama, gde je $n > 1$. Ako uklonimo bilo koji teg, preostalih n tegova se mogu podeliti u dve grupe sa jednakom ukupnom težinom i jednakim brojem tegova. Dokazati da su svi tegovi jednake težine.

10. Igrač A postavlja skakača na šahovsku tablu 8×8. Zatim igrač B odigra jedan potez (u skladu sa pravilima šaha), pa A odigra jedan potez, ali ne sme da postavi skakača na polje na kom je već bio. Nadalje pomeraju skakača naizmenično. Gubi igrač koji nema na raspolaganju potez. Ko pobeđuje?

11. Na livadi se nalazi 2007 ljudi, tako da su sva međusobna rastojanja različita. Svaka osoba drži pištolj i na dati signal, svako puca u najbližu osobu. Da li će neko preživeti obračun?

12. Table dimenzija $n \times n$ je popunjena prirodnim brojevima, tako da se svaka dva susedna broja razlikuju za najviše 1 po apsolutnoj vrednosti. Brojevi su susedni ako se nalaze u poljima koja dele zajedničku stranu. Dokazati da postoji broj koji se pojavljuje bar n puta u tabli.

13. Mali Perica je na tabli 15×15 postavio 15 topova koji se ne tuku. Rekao je malom Jovici da može svakog topa da pomeri za jedan skok skakača u šahu i da će u novodobijenom rasporedu postojati dva topa koja se tuku. Da li je mali Perica u pravu?

14. U $n \geqslant 4$ kutija se nalaze bar 4 čokoladice. Gospodin Debeli u svakom trenutku može da izabere dve različite kutije - uzme po jednu čokoladicu iz njih i stavi je u treću kutiju. Odrediti da li je uvek moguće da Gospodin Debeli sve čokoladice prebaci u jednu kutiju.

15. U svako polje table 2007×2007 je upisan broj 1 ili -1. Za svaku vrstu i svaku kolonu izračunamo proizvod brojeva u njoj. Može li zbir tako dobijenih brojeva biti jednak 0?

16. Nekoliko ljudi je danas posetilo biblioteku. Svako od njih je bio u biblioteci tačno jednom. Među svaka tri čoveka postoje dva koja su se srela u biblioteci. Dokazati da postoje trenuci T i T', tako da je svako od njih bio u biblioteci u vremenu T ili T'.

17. U nizu $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, \ldots$ svaki član, počevši od trećeg je dobijen kao suma prethodna dva člana po modulu 10. Dokazati da je niz periodičan.

18. Kutija sadrži 111 loptica, tako da je svaka loptica bela, plava, zelena ili crvena. Ako se 100 loptica izvuče bez gledanja u kutiju, postojaće 4 loptice različite boje. Koji je najmanji broj loptica koji se mora izvući tako da se garantuje da će među izvučenim lopticama biti 3 različite boje?

19. Na žurci, svaka dva čoveka koji imaju isti broj prijatelja, nemaju zajedničkih prijatelja na žurci. Ako je prijateljstvo uzajamno, dokazati da na žurci postoji osoba koja ima tačno jednog prijatelja.

20. Vlada jednog dalekog kraljevstva odlučuje o sudbini zatvorenika na sledeći način: pred njih se izvedu svi zatvorenici i postave u liniju. Svaki zatvorenik dobije ili belu ili crnu kapu i može da vidi boju kape svih zatvorenika ispred sebe, ali ne svoju niti bilo koju drugu. Zatim zatvorenici jedan po jedan (u proizvoljnom redosledu) pogađaju boju svoje kape. Nakon toga, kralj ubija zatvorenike koji nisu tačno odgovorili. Zatvorenici su se dogovorili i smislili strategiju tako da minimizuju broj pogubljenja. Koji je najmanji broj zatvorenika koji će garantovano preživeti?