Beograd, jun 2006.

Pripreme za Juniorsku Balkanijadu

Geometrija

Đorđe Baralić
djolebar@ptt.yu
063-706-706-6

1. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao, M i N središta stranica AB i CD, respektivno, tačka O presek dijagonala AC i BD, i P i Q projekcije tačke O na AD i BC, respektivno. Dokazati da je MN normalno na PQ.

2. Neka su BE i CF visine oštrouglog trougla ABC sa $\angle BAC = 45°$ i H, M i K njegov ortocentar i središta BC i AH, respektivno.

a) Dokazati da je $MEKF$ kvadrat.

b) Dokazati da je presek dijagonala četvorougla $MEKF$ ujedno i središte duži OH, gde je O centar opisanog kruga trougla ABC

c) Odrediti dužinu EF, ako je poluprečnik opisanog kruga trougla ABC jednak 1.

3. Neka su A_1, B_1 i C_1 tačke na stranicama BC, CA i AB trougla takve da je $AB_1 = C_1B_1$ i $BA_1 = C_1A_1$. Neka je D tačka simetrična tački C_1 u odnosu na A_1B_1 ($D \neq C$). Dokazati da je CD normalno na pravu koja prolazi kroz centre opisanih kružnica trouglova ABC i A_1B_1C.

4. Neka je H ortocentar oštrouglog trougla ABC. Dokazati da središta AB, CH i tačka preseka simetrala uglova $\angle CAH$ i $\angle CBH$ kolinearne tačke.

5. Petougao $ABCDE$ je upisan u krug. Neka je $P = AC \cap BD$ i $Q = AD \cap CE$. Dokazati da ako trouglovi ABP, AEQ, CDP, CDQ i APQ imaju jednake površine, tada je $ABCDE$ pravilan.

6. Neka je ABC oštrougli trougao, CD, AP i BQ njegove visine, i M središte AB. Neka je $R = AB \cap PQ$ i neka su k_1 i k_2 opisani krugovi trougla PQC i DRP, respektivno. Dokazati da:

a) MP je tangenta kružnica k_1 i k_2;

b) $RH \perp CM$, gde je H ortocentar trougla ABC.

7. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$ takav da je $OA = \frac{OB \cdot OD}{OC+CD}$, gde je O presek dijagonala. Tačka Q je druga presečna tačka kruga opisanog oko trougla ABC i prave BD. Dokazati da je CQ simetrala ugla $\angle DCA$.

8. U oštrouglom trouglu ABC tačke D i E su podnožja visina iz A i B respektivno, $AC > BC$ i $AB = 2DE$. Označimo sa O i I centre opisane i upisane kružnice tog trougla. Odrediti $\angle AIO$.

9. Dat je trougao ABC sa ortocentrom H i poluprečnicima upisanog i opisanog kruga r i R. Dokazati da je:

$$AH + BH + CH = 2r + 2R.$$

10. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao i neka su H_a, H_b, H_c i H_d ortocentri trouglova BCD, CDA, DAB i ABC, respektivno. Dokazati da je četvorougao $H_aH_bH_cH_d$ takođe tetivan.

11. Ako je I centar upisanog kruga u trouglu ABC, D druga tačka preseka AI sa krugom opisanim oko trougla ABC tada je $DB = DC = DI$.

12. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao i neka su S_a, S_b, S_c i S_d centri upisanih krugova trouglova BCD, CDA, DAB i ABC, respektivno. Dokazati da je četvorougao $S_aS_bS_cS_d$ pravougaonik.

13. Četiri neparalelne prave u ravni formiraju četri trougla. Dokazati da krugovi opisani oko tih trouglova prolaze kroz jednu zajedničku tačku.

14. Neka je $ABCD$ pravougaonik i neka su M, N, P i Q proizvoljne tačke sa stranica AB, BC, CD i DA. Ako sa p i S obeležimo obim i površinu četvorougla $MNPQ$ dokazati:

a) $p \geq AC + BD$;

b) ako je $p = AC + BD$ tada je $S \leq \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

15. Neka su P, Q i R tačke na stranicama BC, CA i AB trougla ABC, respektivno. Prave AP, BQ i CR seku se u T. Dokazati da je

$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BP} + \frac{TR}{CR} = 1.$$

16. Neka je ABC trougao i neka su P, Q i R tačke takve da su trouglovi BCP, CAQ i ABR jednakostranični. Dokazati:

a) $AP = BQ = CR$;

b) Prave AP, BQ i CR seku se u jednoj tački;

c) Centri jednakostraničnih trouglova BCP, CAQ i ABR formiraju takođe jednakostranični trougao.

17. Neka su a, b, c i d stranice četvorougla u tom redosledu. Dokazati da je površina ne veća od $\frac{ac+bd}{2}$.

18. Unutar trougla ABC na simetrali ugla B data je tačka M, takva da je $AM = AC$ i $\angle BCM = 30°$. Dokazati da je $\angle AMB = 150°$.

19. Na stranici AC trougla ABC izabrana je tačka K takva da je $AK = 2KC$, i $\angle ABK = 2\angle KBC$. Neka je F sredina AC, a L projekcija A na BK. Dokazati da su prave FL i BC normalne.

20. Neka je O tačka unutar paralelograma $ABCD$ takva da je $\angle AOB = \angle COD = 180°$. Dokazati da je $\angle OBC = \angle ODC$.

21. Dat je kvadrat $ABCD$ i tačka M sa AD takva da je $MD = 2AM$. Neka je P presek MB sa krugom opisanim oko kvadrata. Dokazati da PC prolazi kroz središte duži AD.

22. Dat je trougao ABC u kom je $\angle B > 45°$, $\angle A > 45°$. Izvan trougla su konstruisani jednakokrako pravougli trouglovi DCB i ECA, sa pravim uglovima u temenu C. Tačka P se nalazi unutar trougla ABC i pri tom je ABP jednakokrako pravougli u temenu P. Dokazati da je trougao DEP jednakokrako pravougli.

23. Neka je $ABCD$ jednakokraki trapez takav da je $AB = AD = BC$, $AB \parallel DC$, $AB > DC$. Neka je E tačka preseka dijagonala AC i BD i neka je N tačka simetrična tački B u odnosu na pravu AC. Dokazati da je četvorougao $ANDE$ tetivan.

24. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao. Tačke M i N unutrašnje tačke stranica DE i DC respektivno, takve da je $\angle AMN = 90°$ i $AN = \sqrt{2}CM$. Odrediti ugao $\angle BAM$.

25. Neka je ABC jednakokraki trougao takav da je $AB = AC$ i $\angle\frac{A}{2} < \angle B$. Na produžetku visine AM izabrane su tačke D i Z takve da je $\angle CBD = \angle A$ i $\angle ZBA = 90°$. Tačka E je podnožje normale iz M na visinu BF, a tačka K je podnožje normale iz Z na AE. Dokazati da je $\angle KZD = \angle KBD = \angle KZB$.

26. (Sankt Petersburg 1997) Upisani krug trougla projektovan je na stranice toga trougla. Dokazati da su šest krajnjih tačaka ovih projekcija konciklične tačke.

27. Dat je trougao ABC takav da je $\angle A = 20°, \angle B = \angle C = 80°$. Neka su K i L tačke koje leže na stranicama AB i AC takve da je $\angle KCB = 50°$ i $\angle LBC = 60°$. Odrediti $\angle BLK$.

28. Dat je trougao ABC takav da je $\angle A = 20°, \angle B = \angle C = 80°$. Neka su K i L tačke koje leže na stranicama AB i AC takve da je $\angle KCB = 30°$ i $\angle LBC = 60°$. Odrediti $\angle BLK$.