Beograd, jun 2006.

Pripreme za Juniorsku Balkanijadu

Diofantove jednačine, algebarski izrazi, nejednakosti

Đorđe Baralić
djolebar@ptt.yu
063-706-706-6

1. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, $c \in \mathbb{N}$ takve da je

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2001.$$

(JBMO, 2001)

2. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj koji se zapisuje pomoću jedica i nula i deljiv je sa n.

3. Odrediti sve nenegativne cele brojeve x, y takve da je

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

4. Ako je broj $2^n + 1$ prost, dokazati da je n stepen dvojke.

5. Neka su a, b, c različiti realni brojevi za koje postoje realni brojevi x, y takvi da je $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$, $c^3 + cx + y = 0$. Dokazati da je $a + b + c = 0$.

(JBMO, 1999)

6. Neka je n prirodan broj. Broj A se sastoji od $2n$ četvorki, a broj B se sastoji od n osmica. Dokazati da je broj $A + 2B + 4$ poptpun kvadrat.

(JBMO, 2003)

7. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje postoji ceo broj x takav da je

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x.$$

(Bugarska, 1997)

8. Dokazati da je $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \neq \overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}$, gde su a, b i c različite cifre.

(Sankt Peterburg)

9. a) Data su tri realna broja a, b i c takva da važi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Dokazati da je $a = b = c$.

b) Odrediti $x + y$ ako je $\frac{x}{3y} = \frac{y}{2x-5y} = \frac{6x-15y}{x}$ i izraz $-4x^2 + 36y - 8$ uzima maksimalnu vrednost.

(Bugarska, 1998)

10. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$$

gde je p prost broj veći od 3.

11. Odrediti sva rešenja jednačine

$$p - x^4 = 4$$

gde je p prost broj, a x ceo broj.

12. Neka je X skup sa n elemenata. Koliko ima uređenih parova (A, B), gde su A i B disjunktni i $A \subseteq X$, $B \subseteq X$.

13. Neka je:

$$A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1997\cdot 1998}$$

$$B = \frac{1}{1000\cdot 1998} + \frac{1}{1001\cdot 1997} + \ldots + \frac{1}{1998\cdot 1000}.$$

Dokazati da je $\frac{A}{B}$ ceo broj.

14. Dokazati da za $a, b, c \neq 0$ važi

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}\right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c} = 4\,max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}.$$

15. Neka x, y, $z \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju $x + y + z = xyz$. Dokazati da je

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4\,xyz.$$

16. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva x, y, z takve da je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}.$$

17. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $\frac{1}{bc-a^2} + \frac{1}{ca-b^2} + \frac{1}{ab-c^2} = 0$. Dokazati da je

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2} + \frac{b}{(ca-b^2)^2} + \frac{c}{(ab-c^2)^2} = 0.$$